**Vertieft verständnisorientierte Übungsaufgaben aus der Analysis**

**AUFGABE 1** Gegeben ist eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion g und eine Funktion h mit und .

a) Sei g eine lineare, nicht konstante Funktion.

Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Funktion h ebenfalls eine lineare

Funktion ist.

b) Sei der Graph von g und der Graph von h. Es gilt: mit

Für ein c schneiden sich und senkrecht in S.

Bestimmen Sie c und zudem die Koordinaten von S.

c) Es gilt .

Bestimmen Sie alle möglichen Werte von.

d) Sei punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass für alle Funktionswerte von g nicht negativ sind.

e) Sei .

Bestimmen Sie und .

f) Begründen Sie, dass gilt: Aus folgt .

g) Sei h streng monoton wachsend und , zudem sei eine innere Stelle

von I, die keine Wendestelle von h ist.

Untersuchen Sie, ob g ebenfalls streng monoton wachsend sein kann.

.

**AUFGABE 2** Gegeben sind die auf dem gleichen Intervall I mindestens zweimal

differenzierbare Funktionen f und g.

Zudem die auf I definierte Funktion h mit .

a) Seien f und g jeweils lineare Funktionen.

Zeigen Sie, dass dann auch h eine lineare Funktion ist.

b) Die Graphen der beiden linearen Funktionen f und g schneiden sich senkrecht auf

der positiven y- Achse im Punkt S.

Untersuchen Sie, ob der Graph von h ebenfalls durch den Punkt S verlaufen kann.

c) Der Graph von f ist symmetrisch zur y- Achse.

Untersuchen Sie, ob der Graph von h ebenfalls eine einfache Symmetrie

besitzt.

d) Der Graph ist symmetrisch zur y- Achse.

Untersuchen Sie, ob dann auch und symmetrisch zur y- Achse sein müssen.

e) hat den Hochpunkt .

Untersuchen Sie unter welchen Bedingungen h an der inneren Stelle

ebenfalls ein lokales Maximum besitzt.

**AUFGABE 3** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Sei f eine lineare, nicht konstante Funktion.

Zeigen Sie, dass f und g die gleichen Nullstellen besitzen.

b) Zeigen Sie, dass g ebenfalls eine lineare Funktion ist.

c) Sei f eine Potenzfunktion mit mit .

Bestimmen Sie r so, dass g eine konstante Funktion ist.

d) Sei g streng monoton wachsend.

Untersuchen Sie, ob dann auch f streng monoton wachsend sein muss.

**AUFGABE 4** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens dreimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Der Graph von g ist symmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y- Achse ist.

b) ist eine innere Stelle von I. Der Graph von g hat den Tiefpunkt .

Zeigen sie, dass auch der Graph von f den Tiefpunkt T besitzt.

c) Die Graphen von f und g schneiden sich im Punkt senkrecht.

Zeigen sie, dass die Tangente in S an den Graphen von f parallel zur 1.Winkel-

halbierenden ist.

d) f hat die innere Extremstelle .

Zeigen Sie, dass g die innere Wendestelle besitzt.

e) Es gilt

Begründen Sie, dass f auf dem Intervall mindestens eine Nullstelle besitzt.

**AUFGABE 5** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenz-

ierbare Funktion f und eine Funktion g mit und .

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f und der Graph von g mindestens einen Punkt

gemeinsam haben.

b) Entscheiden sie, ob folgende Aussage wahr oder falsch ist (Begründen Sie!)

„Wenn für alle Funktionswerte von f positiv sind, dann gilt

für alle .“

c) Es gilt . Sei t die Tangente an den Graphen von f im Punkt und t\*

die Tangente an den Graphen von g im Punkt .

Zeigen Sie, dass t und t\* parallel zueinander sind.

d) Sei f eine periodische Funktion mit der Periode p, deren Mittelwert über eine

Periode 0 ist.

Zeigen Sie, dass die Funktion g ebenfalls eine periodische Funktion ist.

**AUFGABE 6** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal

differenzierbare Funktion f, die auf I umkehrbar ist und die Funktion g mit

.

a) Der Graph von f hat im Punkt eine Tangente mit der Steigung 0,5.

Der Graph von hat im Punkt eine Tangente.

Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

b) Es gilt . Die Graphen von f und berühren sich im Punkt .

Bestimmen Sie die Steigung der gemeinsamen Tangente im Punkt B.

c) Es gilt .

Begründen Sie, das g die Nullstelle 4 besitzt.

d) Sei f eine lineare Funktion mit .

Begründen Sie, dass g höchstens eine Nullstelle besitzen kann.