# Vertieft verständnisorientierte Übungsaufgaben aus der Analysis

**AUFGABE 1** Gegeben ist eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion g und eine Funktion h mit $\mathrm{h(x)} = \mathrm{g(x)}^2 - \mathrm{g(x^2)}$ und $\mathrm{D_h} = \mathrm{D_g} = I$.

a) Sei g eine lineare, nicht konstante Funktion.

Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Funktion h ebenfalls eine lineare Funktion ist.

b) Sei $\mathrm{G_g}$ der Graph von g und $\mathrm{G_h}$ der Graph von h. Es gilt: $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} + \mathrm{c}$ mit $\mathrm{c} \neq 0$

Für ein c schneiden sich $\mathrm{G_g}$ und $\mathrm{G_h}$ senkrecht in S.

Bestimmen Sie c und zudem die Koordinaten von S.

c) Es gilt $\mathrm{h}(0) = 2$.

Bestimmen Sie alle möglichen Werte von $\mathrm{g}(0)$.

d) Sei $\mathrm{G_h}$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass für $I = [0; \infty[$ alle Funktionswerte von g nicht negativ sind.

e) Sei $\mathrm{h}'(1) = \mathrm{g}'(1) = 2$.

Bestimmen Sie $\mathrm{g}(1)$ und $\mathrm{h}(1)$.

f) Begründen Sie, dass gilt: Aus $\mathrm{h}(1) = \mathrm{h}(-1)$ folgt $|\mathrm{g}(1)| = |\mathrm{g}(-1)|$.

g) Sei h streng monoton wachsend und $\mathrm{h}(1) < 0$, zudem sei $x_1 = 1$ eine innere Stelle

von I, die keine Wendestelle von h ist.

Untersuchen Sie, ob g ebenfalls streng monoton wachsend sein kann.

.

**AUFGABE 2** Gegeben sind die auf dem gleichen Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktionen f und g.
Zudem die auf I definierte Funktion h mit $\mathrm{h(x)} = \mathrm{g(-f(x))}$.

a) Seien f und g jeweils lineare Funktionen.

Zeigen Sie, dass dann auch h eine lineare Funktion ist.

b) Die Graphen der beiden linearen Funktionen f und g schneiden sich senkrecht auf der positiven y- Achse im Punkt S.

Untersuchen Sie, ob der Graph von h ebenfalls durch den Punkt S verlaufen kann.

c) Der Graph $\mathrm{G_f}$ von f ist symmetrisch zur y- Achse.

Untersuchen Sie, ob der Graph $\mathrm{G_h}$ von h ebenfalls eine einfache Symmetrie besitzt.

d) Der Graph $G_h$ ist symmetrisch zur y- Achse.

Untersuchen Sie, ob dann auch $G_f$ und $G_g$ symmetrisch zur y- Achse sein müssen.

e) $G_f$ hat den Hochpunkt $H(0 \mid 1)$.

Untersuchen Sie unter welchen Bedingungen h an der inneren Stelle $x_1 = 0$ ebenfalls ein lokales Maximum besitzt.

**AUFGABE 3** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion f und eine Funktion g mit $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ und $D_f = D_g = I$.

a) Sei f eine lineare, nicht konstante Funktion.

Zeigen Sie, dass f und g die gleichen Nullstellen besitzen.

b) Zeigen Sie, dass g ebenfalls eine lineare Funktion ist.

c) Sei f eine Potenzfunktion mit $f(x) = x^r$ mit $r \in IR\backslash\{0\}$.

Bestimmen Sie r so, dass g eine konstante Funktion ist.

d) Sei g streng monoton wachsend.

Untersuchen Sie, ob dann auch f streng monoton wachsend sein muss.

**AUFGABE 4** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens dreimal differenzierbare Funktion f und eine Funktion g mit $g(x) = x \cdot f(x)$ und $D_f = D_g = I$.

a) Der Graph von g ist symmetrisch zum Ursprung.

Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y- Achse ist.

b) $x_1 = 1$ ist eine innere Stelle von I. Der Graph von g hat den Tiefpunkt $T(1|0)$.

Zeigen sie, dass auch der Graph von f den Tiefpunkt T besitzt.

c) Die Graphen von f und g schneiden sich im Punkt $S(1|-2)$ senkrecht.

Zeigen sie, dass die Tangente in S an den Graphen von f parallel zur 1.Winkelhalbierenden ist.

d) f hat die innere Extremstelle $x_1 = 0$.

Zeigen Sie, dass g die innere Wendestelle $x_1 = 0$ besitzt.

e) Es gilt $(g(2) - f(2)) \cdot (g(3) - f(3)) < 0$

Begründen Sie, dass f auf dem Intervall $]2; 3[$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

**AUFGABE 5** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion f und eine Funktion g mit $g(x) = \int_0^x f(t)dt + f(x)$ und $D_f = D_g = I$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f und der Graph von g mindestens einen Punkt gemeinsam haben.

b) Entscheiden sie, ob folgende Aussage wahr oder falsch ist (Begründen Sie!)

„Wenn für $x > 0$ alle Funktionswerte von f positiv sind, dann gilt $g(x) > f(x)$ für alle $x > 0$."

c) Es gilt $f(2) = 0$. Sei t die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(2|0)$ und t* die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(2|g(2))$.

Zeigen Sie, dass t und t* parallel zueinander sind.

d) Sei f eine periodische Funktion mit der Periode p, deren Mittelwert über eine Periode 0 ist.

Zeigen Sie, dass die Funktion g ebenfalls eine periodische Funktion ist.

**AUFGABE 6** Gegeben sind eine auf einem Intervall I mindestens zweimal differenzierbare Funktion f, die auf I umkehrbar ist und die Funktion g mit $g(x) = \frac{f(x) - \overline{f}(x)}{2}$.

a) Der Graph von f hat im Punkt $P(0|1)$ eine Tangente mit der Steigung 0,5. Der Graph von $\overline{f}$ hat im Punkt $Q(1|0)$ eine Tangente.

Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

b) Es gilt $\overline{f} \neq f$. Die Graphen von f und $\overline{f}$ berühren sich im Punkt $B(a|a)$.

Bestimmen Sie die Steigung der gemeinsamen Tangente im Punkt B.

c) Es gilt $f(4) = 4$.

Begründen Sie, das g die Nullstelle 4 besitzt.

d) Sei f eine lineare Funktion mit $f(x) \neq x$ .

Begründen Sie, dass g höchstens eine Nullstelle besitzen kann.