Vertieft verständnisorientierte Übungsaufgaben aus der Geometrie
Lösungen

AUFGABE 1 Gegeben sind die Punkte $A(4\,|-2\,|1)$, $B(3\,|\,5\,|3)$ und $C(-2\,|\,4\,|\,4)$.

a) Begründen Sie, dass das Dreieck ABC nicht zu einer Raute ABCD ergänzt werden kann.

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und somit $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{54} = 3 \cdot \sqrt{6}$.

Es gilt $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$.

Es gilt $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und somit $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{81} = 9$.

Da alle drei Vektoren eine unterschiedliche Länge besitzen, kann das Dreieck ABC nicht zu einer Raute ergänzt werden.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.

Gesucht ist ein Punkt D in der Ebene ABC mit der Eigenschaft, dass B und D achsensymmetrisch zur Diagonalen AC liegen.

Sei P ein beliebiger Punkt auf AC, dann gilt: $\vec{p} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{r} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Also $P(4 - 6r\,|-2 + 6r\,|1 + 3r)$. Es muss gelten: $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 - 6r \\ -7 + 6r \\ -2 + 3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -6 + 36r - 42 + 36r - 6 + 9r = 81r - 54 = 0$$

➔ $r = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$ ➔ $P(0\,|\,2\,|\,3)$

P ist die Mitte der Strecke BD ➔ $\vec{d} = \vec{b} + 2 \cdot \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

➔ $D(-3\,|-1\,|\,3)$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Drachenvierecks.

Es gilt $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|$. Mit $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 0^2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

➔ $A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 27 \cdot \sqrt{2}$

d) Für den Punkt $D(-3 \mid -1 \mid 3)$ ist das Viereck ABCD ein Drachenviereck. Auf der Geraden AC gibt es einen Punkt E so, dass das Viereck ABED eine Raute ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E.

Es muss gelten $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ➔ $\vec{e} = \vec{b} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

➔ $E(-4 \mid 6 \mid 5)$

Alternative: P ist die Mitte der Strecke AE ➔ $\vec{e} = \vec{a} + 2 \cdot \overrightarrow{AP}$

AUFGABE 2 Gegeben sind die Punkte $P(4 \mid -3 \mid 2)$ und $Q(-4 \mid 1 \mid 10)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes R, der sowohl von P als auch von Q den Abstand 10 besitzt.

Es gilt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und somit $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$.

Sei M die Mitte der Strecke PQ ➔ $M\left(\frac{4+(-4)}{2} \,\middle|\, \frac{-3+1}{2} \,\middle|\, \frac{2+10}{2}\right)$ ➔ $M(0 \mid -1 \mid 6)$

Es gilt: $|\overrightarrow{PM}| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ und $|\overrightarrow{PM}|^2 + |\overrightarrow{MR}|^2 = |\overrightarrow{PR}|^2$ ➔ $|\overrightarrow{MR}|^2 = 10^2 - 6^2 = 64$

➔ $|\overrightarrow{MR}| = 8$ zudem muss gelten $\overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

Zum Beispiel: $\overrightarrow{MR} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ➔ $k \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3k = 8$ ➔ $k = \frac{8}{3}$

➔ $\overrightarrow{MR} = \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ ➔ $\vec{r} = \vec{m} + \overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{13}{3} \\ \frac{26}{3} \end{pmatrix}$

➔ $R\left(\frac{16}{3} \,\middle|\, \frac{13}{3} \,\middle|\, \frac{26}{3}\right)$

b) Begründen Sie, dass es keinen Punkt gibt, der sowohl von P als auch von Q den Abstand 5 besitzt.

Da die Strecke PQ die Länge 12 besitzt, ist M der Punkt mit dem geringsten gleichen Abstand zu P und Q. Dieser Abstand beträgt 6 Längeneinheiten, daher gibt es keinen Punkt der von P und von Q den Abstand 5 hat.

c) Gegeben ist die Ebene $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14$.

Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes T, der in E liegt und sowohl von P als auch von Q den Abstand $\sqrt{117}$ besitzt.

P und Q liegen beide auf E. Es gilt: $|\overrightarrow{PM}|^2 + |\overrightarrow{MT}|^2 = |\overrightarrow{PT}|^2$

➔ $|\overrightarrow{MT}|^2 = 117 - 6^2 = 81$ ➔ $|\overrightarrow{MT}| = 9$ zudem muss gelten $\overrightarrow{MT} \perp \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{MT} \perp \vec{n}$

mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Somit folgt: $\overrightarrow{MT} = k \cdot \overrightarrow{PQ} \times \vec{n}$

$\overrightarrow{PQ} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$ ➔ $|\overrightarrow{PQ} \times \vec{n}| = \sqrt{24^2 + 24^2 + 12^2} = 36$

Wegen $|\overrightarrow{MT}| = 9$ gilt: $k = \frac{1}{4}$ ➔ $\overrightarrow{MT} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Somit folgt: $\vec{t} = \vec{m} + \overrightarrow{MT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ ➔ $T(6 \mid 5 \mid 9)$

AUFGABE 3 Die Punkte $A(3\,|0\,|3)$, $B(6\,|\,12\,|\,6)$, $C(-1\,|\,8\,|\,11)$, $D(-6\,|\,0\,|12)$ und S sind die Eckpunkte einer Pyramide.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E in der die Grundfläche ABCD der Pyramide liegt.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ ➔ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ -36 \\ 72 \end{pmatrix}$ ➔ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

➔ $E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$; Punktprobe mit A liefert: $E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$

b) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.

Zu zeigen: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ und $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}|$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{162} = 9 \cdot \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ ➔ $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-9)^2 + 0^2 + 9^2} = \sqrt{162} = 9 \cdot \sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ➔ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{90} = 3 \cdot \sqrt{10}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ ➔ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2 + 1} = \sqrt{90} = 3 \cdot \sqrt{10}$

Demnach ist ABCD ein Drachenviereck.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die Pyramide ein Volumen von 540 Volumeneinheiten besitzt.

Flächeninhalt der Grundfläche: $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ ➔ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$

$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ ➔ $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + 6^2} = \sqrt{324} = 18$

➔ $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 18 = 108$

Für das Volumen der Pyramide gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot h = 540$ ➔ $h = 15$

$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ ➔ z.B. $\vec{s} = \vec{a} + 5 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}$

➔ $S(13\,|-5\,|\,13)$

AUFGABE 4 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der sowohl die x_1 – Achse als auch die Gerade g liegen.

Ansatz: $E: x_2 + c \cdot x_3 = 0$ und $A(2\,|-4\,|\,4)$ liegt auf E.

➔ $-4 + c \cdot 4 = 0$ ➔ $c = 1$ ➔ $E: x_2 + x_3 = 0$

b) Die x_1 – Achse und die Gerade g schließen zwei Winkel ein.

Weisen Sie nach, dass die Gerade w: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ die Winkelhalbierende eines der beiden Winkel ist.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ➔ $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ➔ $|\vec{v}| = 1$

Der Vektor $\vec{w} = \vec{u} + 6 \cdot \vec{v}$ ist ein möglicher Richtungsvektor einer der beiden Winkelhalbierenden.

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Mit w: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ folgt, dass w eine der beiden Winkelhalbierenden ist.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Winkelhalbierende w* des anderen Winkels.

Es gilt $w^* \perp \mathrm{w}$.

Sei $\overrightarrow{w^*}$ ein Richtungsvektor von w*, dann gilt: $\overrightarrow{w^*} \perp \vec{w}$ und $\overrightarrow{w^*} \perp \vec{n}$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

➔ $\overrightarrow{w^*} = \vec{w} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ ➔ w*: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

Alternative: $\overrightarrow{w^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; Kontrolle: $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

AUFGABE 5 Gegeben sind die Punkte $A(2\,|-3\,|1)$ und $B(6\,|\,5\,|\,7)$.

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke AB.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\8\\6\end{pmatrix}$ ➔ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+8^2+6^2} = \sqrt{116} = 2\cdot\sqrt{29}$

b) Es gibt auf der Strecke AB einen Punkt T, der von A dreimal so weit wie von B entfernt ist.

Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

Es gilt $\overrightarrow{AT} = 3\cdot\overrightarrow{TB} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\4{,}5\end{pmatrix}$

➔ $\vec{t} = \vec{a} + \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\6\\4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\5{,}5\end{pmatrix}$ ➔ $T(\,5\,|\,3\,|\,5{,}5\,)$

c) Auf der Geraden AB gibt es einen zweiten Punkt T*, der ebenfalls von A dreimal so weit entfernt ist wie von B.

Bestimmen Sie die Koordinaten von T*.

Es gilt $\overrightarrow{AT^*} = 3\cdot\overrightarrow{BT^*} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\\9\end{pmatrix}$

➔ $\vec{t^*} = \vec{a} + \overrightarrow{AT^*} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\12\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\9\\10\end{pmatrix}$ ➔ $T^*(\,8\,|\,9\,|\,10\,)$

d) Auf der Geraden AB gibt es zwei Punkte R und R*, die beide k- mal so weit von A entfernt sind wie von B (k > 1).

Begründen Sie, dass es ein k gibt, so dass die Strecke RR* genau so lang wie die Strecke AB ist.

Es gilt $\overrightarrow{RB} = \frac{1}{k+1}\cdot\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BR^*} = \frac{1}{k-1}\cdot\overrightarrow{AB}$

➔ $\overrightarrow{RR^*} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BR^*} = \frac{1}{k+1}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k-1}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{2k}{k^2-1}\cdot\overrightarrow{AB}$

➔ Mit $\overrightarrow{RR^*} = \overrightarrow{AB}$ folgt $\frac{2k}{k^2-1} = 1$ ➔ $2k = k^2 - 1$

➔ $k^2 - 2k - 1 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung: $D = (-2)^2 + 4 = 8$

$k_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$ ➔ Mit k > 1 folgt $k_1 = 1 + \sqrt{2}$

Alternative: Für k = 2 folgt $\overrightarrow{\mathrm{RR}^*} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ und für k = 3 folgt $\overrightarrow{\mathrm{RR}^*} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Sei f mit $\mathrm{f(k)} = \frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2 - 1}$. Da f für k > 1 stetig ist und $\mathrm{f}(2) = \frac{4}{3}$ bzw. $\mathrm{f}(3) = \frac{3}{4}$ gilt, muss f(k) im Intervall] 2 ; 3 [mindestens einmal den Wert 1 annehmen.