

Vertieft verständnisorientierte Übungsaufgaben aus der Stochastik

AUFGABE 1 Gegeben sind die Anteile dreier Typen von PKW unter den Neuzulassungen in einem Land in den Jahren 2018, 2019 und 2020. Im Jahr 2018 wurden in diesem Land 300 000 PKW neu zugelassen.

Jahr	2018	2019	2020
Diesel	50%	40%	30%
Benzin	43%	50%	52%
Elektro/Hybrid	7%	10%	18%

- a) In einer Zeitung steht folgende Aussage: „Der Anteil der neuzugelassenen Diesel-PKW in den Jahren 2018 und 2019 insgesamt ist größer als der Anteil der neuzugelassenen Benzin- PKW im gleichen Zeitraum.“
Entscheiden Sie ob, diese Aussage wahr sein kann und begründen Sie ihre Entscheidung.

Die Aussage kann wahr sein.

Beispiel: Im Jahr 2019 wurden insgesamt 200 000 PKW neu zugelassen.

$$\text{Anzahl der Diesel- PKW 2018: } 0,5 \cdot 300\,000 = 150\,000$$

$$\text{Anzahl der Diesel- PKW 2019: } 0,4 \cdot 200\,000 = 80\,000$$

$$\text{Anzahl der Diesel- PKW insgesamt: } 150\,000 + 80\,000 = 230\,000$$

$$\text{Anzahl der Benzin- PKW 2018: } 0,43 \cdot 300\,000 = 129\,000$$

$$\text{Anzahl der Benzin- PKW 2019: } 0,5 \cdot 200\,000 = 100\,000$$

$$\text{Anzahl der Benzin- PKW insgesamt: } 129\,000 + 100\,000 = 229\,000$$

Da die absolute Anzahl der Diesel-PKW größer als die der Benzin-PKW ist, gilt dies auch für deren Anteile (da der Grundwert derselbe ist)

- b) Bestimmen Sie die Mindestanzahl an PKW, die in diesem Land im Jahr 2019 neu zugelassen worden sind, wenn die Aussage aus a) falsch ist.

Die Aussage ist falsch, falls die absolute Anzahl (2018 und 2019 insgesamt) der Diesel-PKW kleiner oder gleich wie die der Benzin-PKW ist.

Sei x die Anzahl der 2019 neu zugelassenen PKW.

$$\text{Anzahl der Diesel- PKW 2019: } 0,4 \cdot x$$

$$\text{Anzahl der Benzin- PKW 2019: } 0,5 \cdot x$$

$$\text{Bedingung: } 0,4 \cdot x + 150\,000 \leq 0,5x + 129\,000 \rightarrow 21\,000 \leq 0,1x \rightarrow x \geq 210\,000$$

- c) Im Jahr 2019 wurden in diesem Land 240 000 PKW neu zugelassen. Der Anteil der Elektro/Hybrid- PKW die insgesamt in den drei Jahren neu zugelassen worden sind beträgt 12%.

Bestimmen Sie den prozentualen Anstieg der Anzahl der Elektro/Hybrid- PKW vom Jahr 2019 zum Jahr 2020.

Sei y die Anzahl der 2020 neu zugelassenen PKW.
Für die Gesamtanzahl e der Elektro/Hybrid- PKW gilt:

$$e = 0,07 \cdot 300\,000 + 0,1 \cdot 240\,000 + 0,18 \cdot y = 45\,000 + 0,18y$$

$$\text{Somit gilt: } \frac{45\,000 + 0,18y}{300\,000 + 240\,000 + y} = 0,12 \rightarrow 45\,000 + 0,18y = 0,12 \cdot (540\,000 + y)$$

$$\rightarrow 45\,000 + 0,18y = 64\,800 + 0,12y \rightarrow 0,06y = 19\,800 \rightarrow y = 330\,000$$

Für die Anzahl e^* der 2020 neu zugelassenen Elektro/Hybrid- PKW gilt:

$$e^* = 0,18 \cdot 330\,000 = 59\,400$$

Für die Anzahl e^{**} der 2019 neu zugelassenen Elektro/Hybrid- PKW gilt:

$$e^{**} = 0,1 \cdot 240\,000 = 24\,000 \rightarrow \text{Anstieg } \Delta e = e^* - e^{**} = 35\,400$$

$$\text{Prozentualer Anstieg: } \frac{35\,400}{24\,000} \cdot 100\% = 147,5\%$$

AUFGABE 2 Um nachzuweisen, ob eine Person eine bestimmte Krankheit hat, wurde ein Test entwickelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine tatsächlich infizierte Person auch vom Test als infizierte Person erkannt wird (Test: positiv) beträgt 99%. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine tatsächlich nicht infizierte Person auch vom Test als nicht infizierte Person erkannt wird (Test: negativ) beträgt 98%.

- a) In einem Land sind 5% der Einwohner infiziert (Infiziertenrate).

Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine negativ getestete Person tatsächlich nicht infiziert ist.

$$\text{Bedingte Wahrscheinlichkeit: } \frac{0,95 \cdot 0,98}{0,95 \cdot 0,98 + 0,05 \cdot 0,01} \approx 0,9995$$

- b) In einem anderen Land beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person tatsächlich infiziert ist, 50%.

Bestimmen Sie die Infiziertenrate in diesem Land.

$$\text{Bedingte Wahrscheinlichkeit: } \frac{0,99 \cdot p}{0,99 \cdot p + (1-p) \cdot 0,02} = 0,5$$

$$\rightarrow 0,99 \cdot p = 0,5 \cdot (0,99 \cdot p + (1-p) \cdot 0,02)$$

$$\rightarrow 0,99 \cdot p = 0,5 \cdot (0,99 \cdot p + (1-p) \cdot 0,02) = 0,495 \cdot p + 0,01 - 0,01 \cdot p$$

$$\rightarrow 0,99 \cdot p = 0,485 \cdot p + 0,01 \rightarrow 0,505 \cdot p = 0,01 \rightarrow p \approx 0,0198$$

Die Infiziertenrate beträgt ca. 2%.

AUFGABE 3 In einem Volleyballverein sind die Spieler in drei Gruppen eingeteilt worden. Die Durchschnittsgröße der Spieler in Gruppe A beträgt 1,98 m, in der Gruppe B 1,92 m.

- a) Falls ein Spieler X aus Gruppe A in die Gruppe B wechselt dann steigt in beiden Gruppen die Durchschnittsgröße der Spieler.

Geben Sie an, wie groß dieser Spieler sein kann.

Für die Größe x des Spielers muss gelten: $1,92 \text{ m} < x < 1,98 \text{ m}$

- b) Die Durchschnittsgröße in der Gruppe C beträgt auf Zentimeter gerundet 1,97 m. Ein Spieler Y mit der Größe 2,05 m kommt neu in diese Gruppe. Dadurch ändert sich die auf Zentimeter gerundete Durchschnittsgröße nicht.

Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Mitglieder in Gruppe C, bevor dieser Spieler Y hinzukam.

Sei n die Anzahl der Spieler in der Gruppe C bevor der Spieler Y hinzu kommt.

Damit sich der Durchschnitt gerundet nicht ändert muss gelten:

$$\frac{n \cdot 1,965 + 2,05}{n+1} < 1,975 \rightarrow n \cdot 1,965 + 2,05 < 1,975 \cdot n + 1,975$$

$$0,075 < 0,01 \cdot n \rightarrow 7,5 < n \rightarrow \text{Die Mindestanzahl lautet } 8.$$

AUFGABE 4 Ein Kartenspiel besteht aus Karten der vier Farben blau, rot, grün und orange. Von jeder Farbe gibt es genau 20 Karten, von denen jede genau mit einer Zahl von 1 bis 20 beschriftet ist. In jeder Farbe kommt dabei jede Zahl genau einmal vor.

- a) Aus diesem Kartenspiel werden zufällig drei Karten mit einem Griff gezogen.

Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Möglichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Die drei Karten haben alle eine verschiedene Farbe.

B: Alle drei Zahlen sind gleich.

C: Man erhält drei Karten einer Farbe, deren Zahlen unmittelbar aufeinander folgen (Dreiersequenz: z.B. 6 ; 7 ; 8)

$$\text{A: } 80 \cdot 60 \cdot 40 = 192\,000 \text{ Möglichkeiten}$$

$$\text{B: } \binom{4}{3} \cdot 20 = 4 \cdot 20 = 80 \text{ Möglichkeiten}$$

$$\text{C: } \binom{4}{3} \cdot 18 = 4 \cdot 18 = 72 \text{ Möglichkeiten}$$

- b) Ein Spiel wird mit vier Spielern gespielt. Jeder Spieler erhält dabei alle 20 Karten einer Farbe. In jeder Spielrunde wählt jeder Spieler genau eine Karte zufällig aus und legt diese auf Tisch. Sind alle vier Zahlen verschieden, dann gewinnt der Spieler mit der höchsten Zahl diese Runde. Kommt eine Zahl mehrfach vor, dann gewinnt niemand diese Runde.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass jemand die erste Runde gewinnt.

Pfadregeln liefern: $\frac{20}{20} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{20} = \frac{2907}{4000} \approx 0,7268$

- c) Das Spiel wird abgebrochen, sobald eine Spielrunde keinen Gewinner hat. Sei X die Anzahl der Spielrunden, die einen Gewinner hat.

Geben Sie eine mögliche Kartenfolge an, damit $X = 20$ gilt.

Blau 20 ; 19 ; 18 ; ... ; 4 ; 3 ; 2 ; 1
 Rot 19 ; 18 ; 17 ; ... ; 3 ; 2 ; 1 ; 20
 Grün 18 ; 17 ; 16 ; ... ; 2 ; 1 ; 20 ; 19
 Orange 17 ; 16 ; 15 ; ... ; 1 ; 20 ; 19 ; 18

- d) Jetzt wählt nur der Spieler mit den roten Karten seine Karten zufällig aus und legt sie nacheinander auf den Tisch bis eine Sequenz unterbrochen wird.

Beispiele: 12; 13; 14; 8 (Dreiersequenz)

3; 4; 5; 6; 7; 8; 17 (Sechsersequenz)

Bestimmen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten eine Fünfersequenz zu erhalten.

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; (nicht 6) → 14 Möglichkeiten

2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; (nicht 7) → 14 Möglichkeiten

...

15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; (nicht 20) → 14 Möglichkeiten

16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; (egal) → 15 Möglichkeiten

Somit gibt es insgesamt $15 \cdot 14 + 15 = 225$ Möglichkeiten eine Fünfersequenz zu erhalten.

Hintergrund: Für eine Sequenz von k Karten gibt es $(20 - k)^2$ Möglichkeiten.

Dabei gilt $1 \leq k \leq 19$

Sonderfall: Es gibt genau eine 20-er Sequenz.

AUFGABE 5 Ein Palindrom ist eine natürliche Zahl, die ihren Wert nicht ändert, wenn man ihrer Ziffern in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt. (Beispiel: 2 772)

- a) Bestimmen Sie sowohl die Anzahl aller dreistelligen als auch die Anzahl aller vierstelligen Palindrome.

3 stellige Palindrome: $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ Möglichkeiten

4 stellige Palindrome: $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$ Möglichkeiten

- b) Ein Zufallsgenerator liefert jede der Ziffern 0 bis 9 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Mit Hilfe dieses Zufallsgenerators werden vierstellige Zahlen erzeugt. Dabei wird zuerst die Führungsziffer der Zahl so zufällig erzeugt, dass die Ziffern 1 bis 9 jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

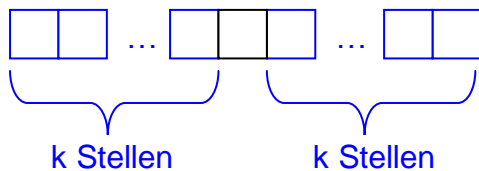
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die vierstellige Zahl ein Palindrom ist.

Es gibt $9\,999 - 999 = 9\,000$ vierstellige Zahlen $\rightarrow p = \frac{90}{9000} = 0,01 = 1\%$

- c) Sei n eine ungerade natürliche Zahl.

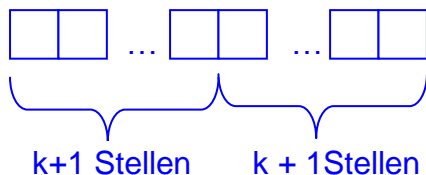
Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit mit dem Zufallsgenerator ein Palindrom mit n Stellen zu erhalten, größer ist als die Wahrscheinlichkeit ein Palindrom mit $n + 1$ Stellen zu erhalten.

Sei $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.



Anzahl der Palindrome: $9 \cdot 10 \cdot 10 \dots 10 \cdot 10 \cdot 1 \dots 1 \cdot 1 = 9 \cdot 10^k$

Sei $n + 1 = 2k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.



Anzahl der Palindrome: $9 \cdot 10 \cdot 10 \dots 10 \cdot 1 \dots 1 \cdot 1 = 9 \cdot 10^k$

Da es gleich viele n -stellige und $(n+1)$ -stellige Palindrome gibt, es aber zehnmal so viele $(n+1)$ -stellige Zahlen wie n -stellige Zahlen gibt ist die Wahrscheinlichkeit größer ein n -stelliges Palindrom zu erhalten.

- d) Die Wahrscheinlichkeit mit dem Zufallsgenerator ein Palindrom mit n Stellen zu erhalten beträgt $p_n = 10^{-5}$.

Geben Sie an welche Werte für n in Frage kommen.

Mit Teilaufgabe c) und der Pfadregel folgt:

Falls n ungerade ist, gilt $p_n = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \dots \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^k = 10^{-k}$

$$\rightarrow k = 5 \rightarrow n = 2 \cdot 5 + 1 = 11$$

Falls n gerade ist, gilt $p_n = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \dots \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1} = 10^{-(k+1)}$

$$\rightarrow k + 1 = 5 \rightarrow n = 2 \cdot 5 = 10$$

Es kommen $n = 10$ und $n = 11$ in Frage.

- e) Bestimmen Sie die Anzahl der fünfstelligen Palindrome, bei denen die ersten drei Ziffern verschieden voneinander sind.

Es gibt $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 648$ solche Palindrome.

- f) Bestimmen Sie die Anzahl der sechsstelligen Palindrome, die nur gerade Ziffern besitzen, wobei die ersten beiden Ziffern verschieden voneinander sind.

Es gibt $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 80$ solche Palindrome.

- g) Bestimmen Sie die Anzahl der siebenstelligen Palindrome, deren ersten drei Ziffern eine ansteigende Sequenz direkt aufeinander folgender Ziffern sind.
(Beispiel: 3 451 543)

--	--	--	--	--	--	--

Für die ersten drei Ziffern gibt es die 7 Möglichkeiten: 123 ; 234 ; ... ; 789
Für die vierte Ziffer (die beliebig gewählt werden kann) gibt es 10 Möglichkeiten.
Die restlichen Ziffern liegen dann aber fest.

Es gibt $7 \cdot 10 = 70$ solche Palindrome.

- h) Begründen Sie, dass es keine sechsstelligen Palindrome mit der Quersumme 21 gibt.

Ein sechsstelliges Palindrom hat die Form: $abccba$

Für die Quersumme gilt also: $Q = a + b + c + c + b + a = 2 \cdot (a + b + c)$

Demnach muss die Quersumme gerade sein und es gibt keine solchen Palindrome.

- i) Bestimmen Sie die Anzahl der fünfstelligen Palindrome mit der Quersumme 13.

Ein fünfstelliges Palindrom hat die Form: $abcba$ (wobei $a \neq 0$ gilt)

Für die Quersumme gilt also: $Q = a + b + c + b + a = 2 \cdot (a + b) + c = 13$

$\rightarrow c$ muss ungerade sein

Fallunterscheidung:

$$c = 9 \rightarrow a + b = 2 \rightarrow (a ; b) = (1 ; 1) \text{ oder } (2 ; 0)$$

$$c = 7 \rightarrow a + b = 3 \rightarrow (a ; b) = (1 ; 2), (2 ; 1) \text{ oder } (3 ; 0)$$

$$c = 5 \rightarrow a + b = 4 \rightarrow (a ; b) = (1 ; 3), (2 ; 2), (3 ; 1) \text{ oder } (4 ; 0)$$

$$c = 3 \rightarrow a + b = 5 \rightarrow (a ; b) = (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2), (4 ; 1) \text{ oder } (5 ; 0)$$

$$c = 1 \rightarrow a + b = 6 \rightarrow (a ; b) = (1 ; 5), (2 ; 4), (3 ; 3), (4 ; 2), (5 ; 1) \text{ oder } (6 ; 0)$$

Demnach gibt es $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ solche Palindrome.

AUFGABE 6 Gegeben sind zwei Urnen A und B. 20 rote und 20 weiße Kugeln werden zufällig auf die beiden Urnen so verteilt, dass sich am Ende in beiden Urnen jeweils 20 Kugeln befinden.

Immer wenn aus der Urne A eine Kugel gezogen wird, dann wird diese sofort in die Urne B gelegt. Immer wenn man eine Kugel aus der Urne B zieht, dann wird diese sofort in die Urne A gelegt.

- a) Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten die 40 Kugeln auf die beiden Urnen zu verteilen.

Sei r_A die Anzahl der roten Kugeln in Urne A. Wenn r_A bekannt ist, dann kennt man auch die Anzahl aller farbigen Kugeln in beiden Urnen.

Anzahl der weißen Kugeln in Urne A: $20 - r_A$

Anzahl der weißen Kugeln in Urne B: r_A

Anzahl der roten Kugeln in Urne B: $20 - r_A$

Es genügt daher die Möglichkeiten für r_A zu betrachten.

Es gilt $0 \leq r_A \leq 20 \rightarrow$ Es gibt genau 21 mögliche Verteilungen.

- b) Die Wahrscheinlichkeit beim ersten Zug aus Urne A eine rote Kugel zu ziehen beträgt 40%.

Bestimmen Sie jeweils die Anzahlen der jeweiligen Kugelfarben in den beiden Urnen bevor zum ersten Mal gezogen wird.

Es gilt: $\frac{r_A}{20} = 0,4 \rightarrow r_A = 8$

In Urne A befinden sich 8 rote und 12 weiße Kugeln.

In Urne B befinden sich 12 rote und 8 weiße Kugeln.

- c) Sei X die Anzahl der roten Kugeln zu Beginn in der Urne A. Man zieht nacheinander aus beiden Urnen, wie oben beschrieben, zufällig je eine Kugel.

Gegeben ist das Ereignis E: "Beide Kugeln haben die gleichen Farbe."

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von E in Abhängigkeit von X .

$$P(rr) = \frac{X}{20} \cdot \frac{20-X+1}{21} = \frac{X \cdot (21-X)}{420}; \quad P(ww) = \frac{20-X}{20} \cdot \frac{X+1}{21} = \frac{(X+1) \cdot (20-X)}{420}$$

$$\rightarrow P(rr) + P(ww) = \frac{X \cdot (21-X)}{420} + \frac{(X+1) \cdot (20-X)}{420} = \frac{21X - X^2 + 20X - X^2 + 20 - X}{420} = \frac{-2X^2 + 40X + 20}{420}$$

$$P(rr) + P(ww) = P(E; X) = \frac{-X^2 + 20X + 10}{210}$$

- d) Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich X symmetrisch ist.

$$\text{Für } X = k \text{ gilt: } P(E; X = k) = \frac{-k^2 + 20k + 10}{210}$$

Für $X = 20 - k$ gilt:

$$P(E; X = 20 - k) = \frac{-(-k)^2 + 20 \cdot (-k) + 10}{210} = \frac{-400 + 40k - k^2 + 400 - 20k + 10}{210} = \frac{-k^2 + 20k + 10}{210}$$

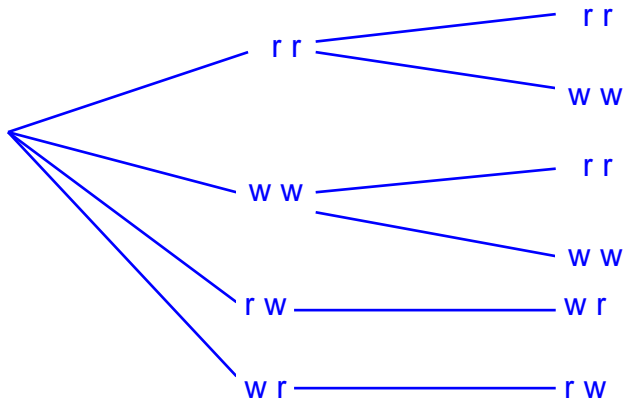
Demnach gilt: $P(E; X = 20 - k) = P(E; X = k)$

Also ist die Verteilung symmetrisch bezüglich X .

e) Jetzt gilt $X = 10$. Es wird, wie oben beschrieben, zunächst aus Urne A, dann aus Urne B, dann erneut aus Urne A und zuletzt aus Urne B zufällig eine Kugel gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich anschließend in beiden Urnen erneut jeweils 10 rote Kugeln befinden.

Folgendes Baumdiagramm gibt einen Überblick über die möglichen Fälle:



$$\text{Wegen } X = 10 \text{ gilt: } P(rr) = P(ww) = \frac{10}{20} \cdot \frac{11}{21} = \frac{11}{42}$$

$$P(rr; rr) = P(rr; ww) = P(ww; rr) = P(ww; ww) = \frac{11}{42} \cdot \frac{11}{42} = \frac{121}{1764}$$

$$P(rw; wr) = P(wr; rw) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{11}{20} \cdot \frac{11}{21} = \frac{121}{1764}$$

$$\text{Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also: } 4 \cdot \frac{121}{1764} + 2 \cdot \frac{121}{1764} = \frac{121}{294} \approx 0,4116$$