Gestaltung von Klausuren

Konzeptionsgruppe Abitur 2024

Grundsätzliches zu Klausuren

- Die Klausuren sollten stets auch einen hilfsmittelfreien Teil besitzen.
- In den Klausuren sollten den Schülerinnen und Schülern im hilfsmittelfreien Teil auch Aufgaben gestellt werden, die zumindest teilweise den Anforderungsbereich III (AB III) haben.

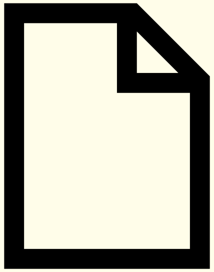
Arbeitsauftrag

Formulieren Sie zu einem gegebenen Impuls eine Fragestellung im Anforderungsbereich III .

Piktogramm: MS Powerpoint 2019

Zeit: 15 Minuten

Ergebnis für Fortbildung dokumentieren

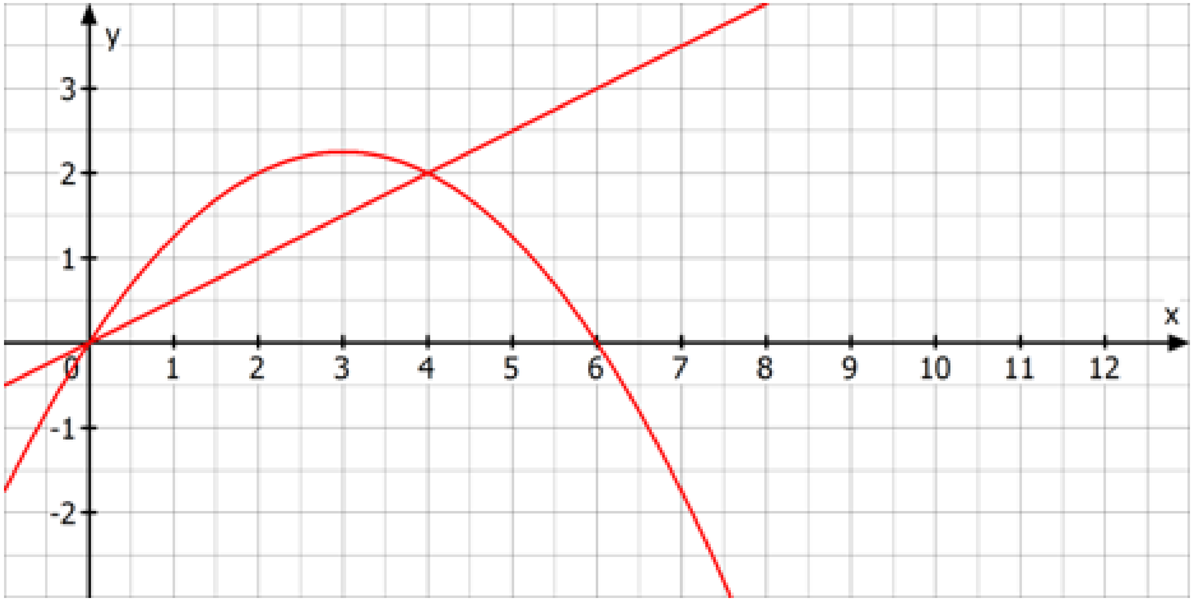


Piktogramm: MS Powerpoint 2019

Beispiel (Analysis Impuls 2)

Gegeben ist eine Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = a \cdot x \cdot (x-6)$; $a < 0$
sowie eine Schar von Ursprungsgeraden mit Steigung $m > 0$.

Die Abbildung zeigt eine der Ursprungsgeraden und einen der Graphen der Funktionenschar f_a.



Beispiel (Analysis Impuls 2)

Mögliche Aufgabenstellung:

Zu jeder Parabel existiert eine Ursprungsgerade, die diese im Scheitelpunkt schneidet. Untersuchen Sie, ob der Inhalt des Flächenstücks, welches dann von Parabel und Ursprungsgerade eingeschlossen wird, unabhängig von den Parametern a bzw. m ist.

Mögliche Lösung:

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten S (3/ –9a).
Die Gerade g: y = –3ax schneidet die Parabel in diesem Punkt.

$A = \int_0^3 (f_a(x) + 3ax)\, dx = -4{,}5a$

ist nicht unabhängig von den gewählten Parametern.

Beispiel (Geometrie Impuls 1)

Gegeben sind die Gleichungen der beiden Geraden g und h

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R}$

a) Der gemeinsame Punkt S von g und h hat die x_2-Koordinate 4. Geben Sie die Koordinaten von S an.

b)

Beispiel (Geometrie Impuls 1)

Mögliche Aufgabenstellung für b):

Eine Gerade j entspricht der Winkelhalbierenden eines Winkels, der beim Schnitt der Geraden g und h entsteht. Ermitteln Sie eine mögliche Gleichung einer solchen Geraden j.

Mögliche Lösung:

Da die Richtungsvektoren $\overrightarrow{u_g}$ und $\overrightarrow{u_h}$ der beiden Geraden g und h gleich lang sind (ihre Koordinaten sind betragsmäßig gleich), ist der Vektor $\overrightarrow{u_g} + \overrightarrow{u_h}$ ein möglicher Richtungsvektor der Geraden j, da der Vektor $\overrightarrow{u_g} + \overrightarrow{u_h}$ in der Raute, die die beiden Vektoren $\overrightarrow{u_g}$ und $\overrightarrow{u_h}$ erzeugen, der Diagonalen entspricht.

Verwendet man den Ortsvektor des Punktes S aus Aufgabenteil a) als Stützvektor, ist eine mögliche Gleichung von j

$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$

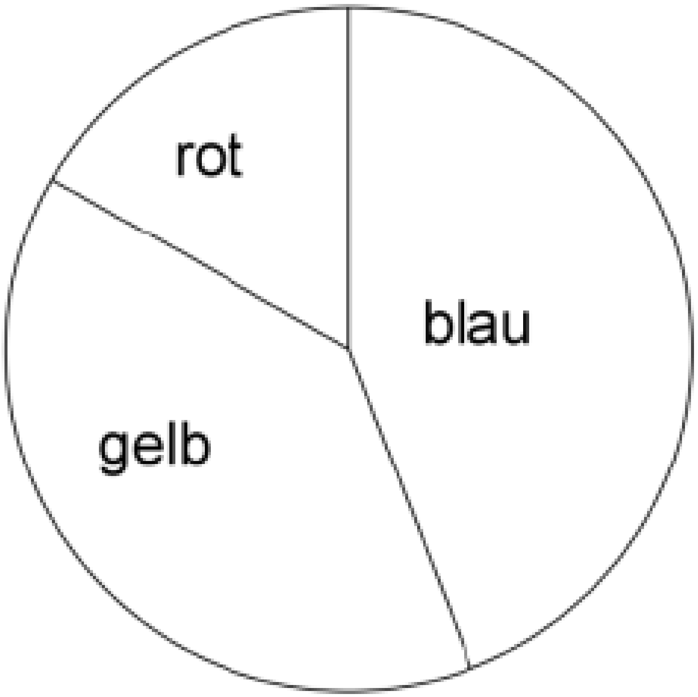
Beispiel (Geometrie Impuls 1)

Teilt j den „anderen“ Winkel, der beim Schnitt der beiden Geraden g und h entsteht (d.h. den Nebenwinkel zu obigem Winkel), so ist $\overrightarrow{u_g} - \overrightarrow{u_h}$ ein möglicher Richtungsvektor von j, eine alternative Lösung ist also

$$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R} \;\; bzw. \;\; j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Beispiel (Stochastik Impuls 2)

Ein Glücksrad (siehe Abb.) hat drei Sektoren. Die Wahrscheinlichkeit für „gelb“ ist bei diesem Glücksrad dreimal so groß, wie die Wahrscheinlichkeit für „rot“.



Beispiel (Stochastik Impuls 2)

Mögliche Aufgabenstellung:

Sei p die Wahrscheinlichkeit für „rot“ bei einmaligem Drehen des Glücksrads.

Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Bestimmen Sie den Wert von p so, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man dabei zwei verschiedene Farben erhält, maximal wird.

Mögliche Lösung:

Es gilt: $P(rr) = p^2$; $P(gg) = (3p)^2 = 9p^2$; $P(bb) = (1-4p)^2$

Somit gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei verschiedene Farben erhält:

$P(\text{versch.}) = f(p) = 1 - (p^2 + 9p^2 + (1-4p)^2) = 1 - (10p^2 + 1 - 8p + 16p^2)$

$\Rightarrow f(p) = 8p - 26p^2$

Gesucht ist das Maximum von f:

$f'(p) = 8 - 52p$; $f''(p) = -52 < 0$

$f'(p) = 8 - 52p = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

Wegen $f''(p_1) = -52 < 0$ liegt ein Maximum vor.

Grundsätzliches zu Klausuren

- In den Klausuren sollten alle Aufgabenstellungen mithilfe der üblichen Operatoren formuliert werden.
- In den Klausuren sollten die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K1 bis K6) in einem ausgewogenen Verhältnis eingefordert werden.

Grundsätzliches zu Klausuren

Die allgemeine mathematische Kompetenz „mathematisch kommunizieren“ (K6) bezieht sich in den Klausuren

- zum einen auf das Verstehen und Erfassen von mathematischen Texten: „passives K6“
- zum anderen auf das verständliche schriftliche Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen: „aktives K6“

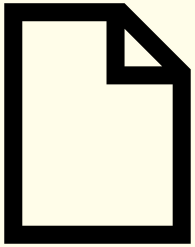
Arbeitsauftrag

Ergänzen Sie eine Klausuraufgabe aus dem Teil B (mit Hilfsmitteln) um eine weitere Teilaufgabe, bei der die allgemeine mathematische Kompetenz K6 (mathematisch kommunizieren) im Vordergrund steht.
Formulieren Sie auch eine mögliche Lösung.

Zeit: 15 Minuten

Piktogramm: MS Powerpoint 2019

Ergebnis für Fortbildung dokumentieren



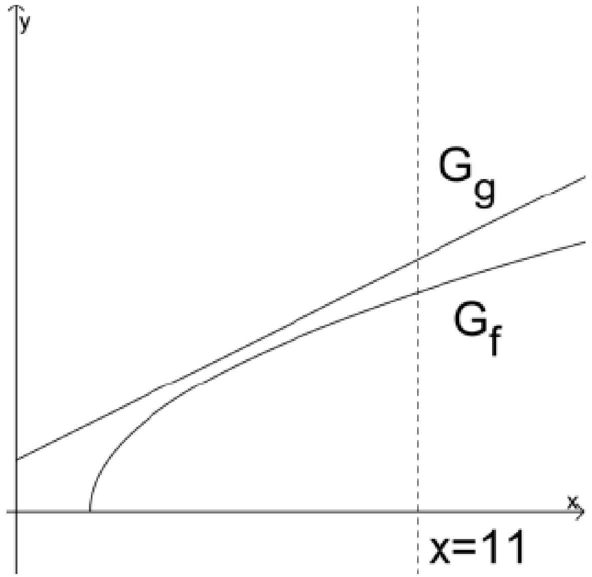
Piktogramm: MS Powerpoint 2019

Aufgabe Teil B (Analysis)

AUFGABE 1 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-2}$ und g mit $g(x) = 0{,}5x + 1{,}4$; $(x \geq 0)$

Die beiden Koordinatenachsen, die beiden Graphen G_f und G_g und die Gerade mit der Gleichung $x = 11$ begrenzen eine Fläche.

Wenn diese Fläche um die x- Achse rotiert entsteht ein Rotationskörper. Dieser Rotationskörper aus Glas dient als Trinkbecher. (x, f(x) und g(x) jeweils in cm)



Skizze der Graphen ohne Skalierung der Achsen.

a) Berechnen Sie das maximale Wasservolumen, das in den Trinkbecher passt.

b) Bestimmen Sie, wie hoch das Wasser im Becher steht, falls sich 250 cm^3 im Becher befinden? (Geben Sie Ihr Ergebnis auf eine Dezimale gerundet in cm an!)

c) Bestimmen Sie die Wandstärke am oberen Rand des Bechers.

Beispiel (Aufgabe Teil B Analysis)

Mögliche Aufgabenstellung:

d) Das Volumen des Glaskörpers soll bestimmt werden.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man dieses Volumen rechnerisch bestimmen kann.

Mögliche Lösung:

Man bestimmt mithilfe des Integrals $\pi \cdot \int_0^{11} (g(x))^2 dx$ das Rotationsvolumen V_g, das entsteht falls nur die Fläche unter G_g um die x-Achse rotiert.
Dann subtrahiert man von V_g das maximale Wasservolumen V_f aus der Teilaufgabe a), das man mit Hilfe des Integrals $\pi \cdot \int_2^{11} (f(x))^2 dx$ berechnet hat.
Diese Differenz $V_g - V_f$ ist das gesuchte Glasvolumen.

Aufgabe Teil B (Geometrie)

AUFGABE 2 Auf einem Platz, der sich im Modell in der x_1x_2 – Ebene befindet, steht im Punkt $P(11 \mid 1 \mid 0)$ ein 9 m hoher Mast. Eine punktförmige Lampe wird im Modell durch den Punkt $L(13 \mid -5 \mid 11)$ beschrieben.

Nachts wirft der Mast einen Schatten, der zum Teil auf dem Platz und zum Teil auf der Wand eines Hochhauses verläuft. (Alle Angaben in Meter.)

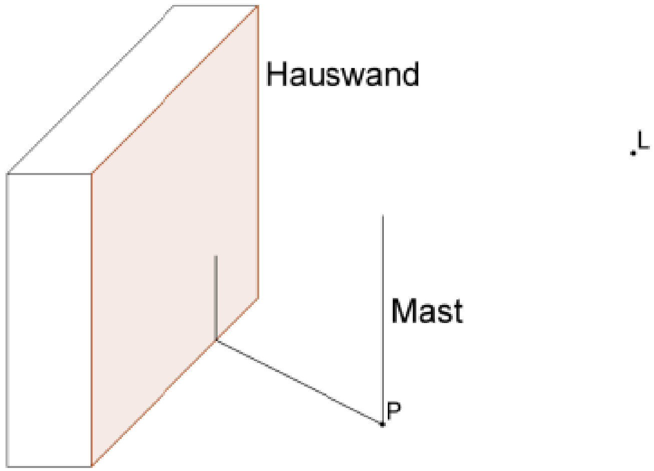
Die Lage der Wand des Hochhauses wird durch die Ebene W: $4x_1 - 2x_2 = 12$ beschrieben.

(Die Situation wird in der nichtmaßstäblichen Skizze unten verdeutlicht.)

a) Berechnen Sie den Abstand des Mastes zur Ebene W.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts auf W, indem sich im Modell der Schatten der Mastspitze befindet.

Skizze



Beispiel (Aufgabe Teil B Geometrie)

Mögliche Aufgabenstellung:

c) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dessen Hilfe man die Länge des Teilschattens, der sich auf dem Platz bildet, rechnerisch bestimmen kann.

Mögliche Lösung:

Um die Länge l zu berechnen, muss man die Koordinaten des Punktes K kennen, in dem der Schatten an der Wand abknickt. K kann als Schnittpunkt einer Ebene E, in der die Punkte L, P und die Mastspitze S liegen und der Spurgeraden g der Ebene W in der x_1x_2 – Ebene aufgefasst werden. Auf der Geraden g liegen die beiden Spurpunkte $S_1(\,3 \mid 0 \mid 0)$ und $S_2(\,0 \mid -6 \mid 0)$. Eine Parametergleichung der Geraden lautet: $g\colon \vec{x} = \vec{s_1} + r \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$. Eine Parametergleichung der Ebene E lautet:
$E\colon \vec{x} = \vec{s} + s \cdot \overrightarrow{SL} + t \cdot \overrightarrow{SP}$. Nach dem Lösen des LGS kann man die Koordinaten von K berechnen.

Für die Länge l des Teilschattens auf dem Platz gilt: $l = \left|\overrightarrow{KP}\right|$

Aufgabe Teil B (Stochastik)

AUFGABE 3 Ein multiple- choice- Test besteht aus 20 Fragen mit jeweils 4 Antwortmöglichkeiten. Dabei ist jeweils genau eine Antwort richtig.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand durch reines Raten mindestens fünf Fragen richtig beantwortet.

b) Der Lehrer überlegt sich, ab wie vielen richtig beantworteten Fragen der Test als bestanden gilt. Er möchte erreichen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand den Test durch reines Raten besteht, höchstens 5% beträgt.

Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von richtigen Antworten, mit der der Test als bestanden gilt, damit seine Bedingung erfüllt ist.

Beispiel (Aufgabe Teil B Stochastik)

Mögliche Aufgabenstellung:

c) Eva möchte die Fragen des multiple- choice- Tests durch reines Raten beantwort-en. Dies möchte Sie mit einem geeigneten Zufallsexperiment simulieren.

Beschreiben Sie, wie sie unter Verwendung eines Behälters und verschieden farbigen Kugeln dieses Zufallsexperiment durchführen könnte.

Mögliche Lösung:

Man legt eine grüne, eine rote, eine schwarze und eine weiße Kugel in eine Schüs-sel. Man zieht dann zufällig eine Kugel aus der Schüssel. Zieht man die grüne Kugel, dann kreuzt sie bei Frage 1 die Antwortmöglichkeit 1 an. Analog geht man bei den anderen Farben vor:

„rot“: Antwortmöglichkeit 2
„schwarz“: Antwortmöglichkeit 3
„weiß“: Antwortmöglichkeit 4

Danach legt man die Kugel zurück in die Schüssel und führt diesen Vorgang insgesamt 20 Mal durch.

Grundsätzliches zu Klausuren

- Es ist ratsam im Teil A (ohne Hilfsmittel) auch schon einmal in einer Klausur die Schülerinnen und Schüler zwischen zwei Aufgaben mit AB III auswählen zu lassen.
- Die Beschränkung der Arbeitszeit für den Teil A im schriftlichen Abitur ist für die Schülerinnen und Schüler in BW eine gewisse Neuerung.
  Wir müssen diese Neuerung nicht zwangsläufig auch für die Klausuren übernehmen, wenngleich wir die Beschränkung der Arbeitszeit in der Abiturvorbereitung thematisieren.