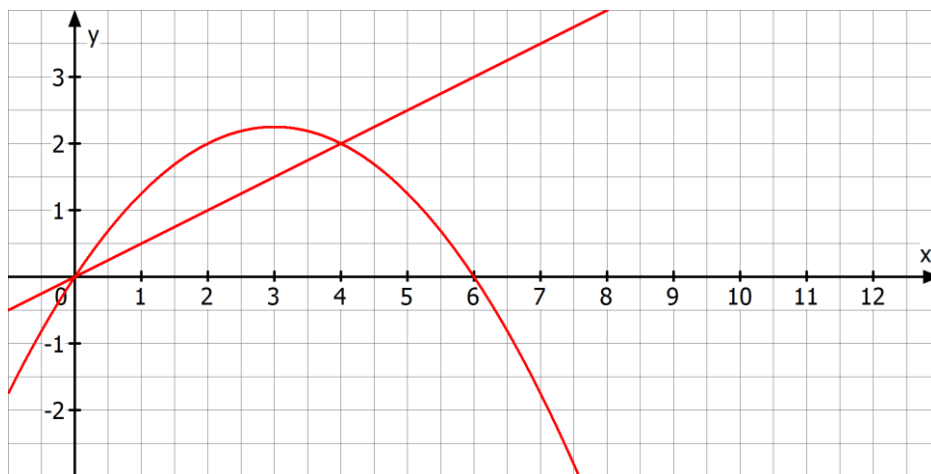


Klausuren Impuls 2 (Analysis)

Gegeben ist eine Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = a \cdot x \cdot (x - 6)$; $a < 0$

sowie eine Schar von Ursprungsgeraden mit Steigung $m > 0$.

Die Abbildung zeigt eine der Ursprungsgeraden und einen der Graphen der Funktionenschar f_a .



Mögliche Aufgabenstellung:

Zu jeder Parabel existiert eine Ursprungsgerade, die diese im Scheitelpunkt schneidet. Untersuchen Sie, ob der Inhalt des Flächenstücks, welches dann von Parabel und Ursprungsgerade eingeschlossen wird, unabhängig von den Parametern a bzw. m ist.

Mögliche Lösung:

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(3 | -9a)$.

Die Gerade $g: y = -3ax$ schneidet die Parabel in diesem Punkt.

$$A = \int_0^3 (f_a(x) + 3ax) dx = -4,5a$$

ist nicht unabhängig von den gewählten Parametern.

Mögliche Aufgabenstellung:

Die Lage der Schnittpunkte der Graphen der Funktionenschar von f_a mit der x-Achse ist unabhängig vom Parameter a . Sie werden mit O und N bezeichnet. Der Schnittpunkt eines der Graphen der Funktionenschar f_a mit einer der Ursprungsgeraden wird mit S bezeichnet. Betrachtet wird das Dreieck ONS.

a1) Begründen Sie, weshalb der Flächeninhalt des Dreiecks ONS für $S(3|-9a)$ maximal ist.

a2) Das Dreieck ONS kann bei S für $a \leq -\frac{1}{3}$ rechtwinklig sein.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man zeichnerisch die Koordinaten von S ermitteln kann.

Begründen Sie, dass für $-\frac{1}{3} < a < 0$ kein Dreieck ONS existiert, das bei S rechtwinklig ist.

Mögliche Lösung:

a1) Aus $f_a(x) = 0$ folgt $O(0/0)$ und $N(6/0)$. Die Länge der Grundseite des Dreiecks beträgt somit 6 LE.

Die Höhe des Dreiecks entspricht der y-Koordinate von S : Diese wird maximal, falls S der Scheitelpunkt des Graphen von f_a ist.

Wegen $f'_a(x) = 2ax - 6a = 0$ für $x = 3$ ist $S(3|-9a)$ der Scheitelpunkt des des Graphen von f_a und somit der Flächeninhalt des Dreiecks ONS maximal.

a2) Man zeichnet einen Kreis um den Mittelpunkt $M(3/0)$ mit Radius 3 LE. Die gemeinsamen Punkte des Kreises mit dem Graphen von f_a sind mögliche Punkte für die Ecke S (Satz des Thales).

Für für $-\frac{1}{3} < a < 0$ gilt $y_S < 3$, somit hat der Kreis um den Mittelpunkt $M(3/0)$ mit Radius 3 LE keine Schnittpunkte mit dem Graphen von f_a , da dieser vollständig unterhalb der Kreislinie verläuft.