Klausuren Impuls 1 (Analytische Geometrie)

Gegeben sind die Gleichungen der beiden Geraden g und h

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R}$

a) Der gemeinsame Punkt S von g und h hat die x_2-Koordinate 4. Geben Sie die Koordinaten von S an.

b)

Lösung für a): S(5|4|-1)

Mögliche Aufgabenstellung 1:

Eine Gerade j entspricht der Winkelhalbierenden eines Winkels, der beim Schnitt der Geraden g und h entsteht. Ermitteln Sie eine mögliche Gleichung einer solchen Geraden j.

Mögliche Lösung:

Da die Richtungsvektoren $\overrightarrow{u_g}$ und $\overrightarrow{u_h}$ der beiden Geraden g und h gleich lang sind (ihre Koordinaten sind betragsmäßig gleich), ist der Vektor $\overrightarrow{u_g} + \overrightarrow{u_h}$ ein möglicher Richtungsvektor der Geraden j, da der Vektor $\overrightarrow{u_g} + \overrightarrow{u_h}$ in der Raute, die die beiden Vektoren $\overrightarrow{u_g}$ und $\overrightarrow{u_h}$ erzeugen, der Diagonalen entspricht.

Verwendet man den Ortsvektor des Punktes S aus Aufgabenteil a) als Stützvektor, ist eine mögliche Gleichung von j

$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$

Teilt j den „anderen“ Winkel, der beim Schnitt der beiden Geraden g und h entsteht (d.h. den Nebenwinkel zu obigem Winkel), so ist $\overrightarrow{u_g} - \overrightarrow{u_h}$ ein möglicher Richtungsvektor von j, eine alternative Lösung ist also

$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R}$ $bzw.$ $j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$

Mögliche Aufgabenstellung 2:

Es gibt Punkte, die von S 3 LE entfernt sind und von beiden Geraden den gleichen Abstand haben. Bestimmen Sie die Koordinaten eines dieser Punkte.

Mögliche Lösung:

Ein solcher Punkt liegt auf einer Winkelhalbierenden eines Winkels, den die Geraden g und h einschließen mit dem Scheitel S, d.h. z.B. auf der Geraden j mit

$$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R}$$

Für $\mu = \pm\frac{3}{4}$ erhält man Punkte P und Q, die 3 LE von S entfernt sind und damit die gestellten Bedingungen erfüllen. Zwei (der vier) mögliche Punkt sind also P(2|4|-1) und Q(8|4|-1).