# Klausuren Impuls 1 (Stochastik)


Urne 1 Urne 2

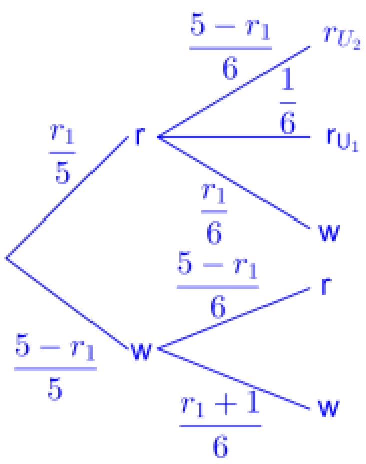
5 rote und 5 weiße Kugeln werden auf die beiden Urnen 1 und 2 verteilt. In den beiden Urnen liegen jeweils genau 5 Kugeln.
Sei $r_1$ die Anzahl der roten Kugeln in der Urne 1.

**Mögliche Aufgabenstellung 1:**

Zuerst wird eine Kugel zufällig aus der Urne 1 gezogen und in die Urne 2 gelegt. Anschließend wird eine Kugel zufällig aus der Urne 2 gezogen und auf den Tisch gelegt. Die Kugel die auf den Tisch gelegt wird ist rot. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel ursprünglich in der Urne 1 gelegen hat, beträgt $\frac{4}{9}$.

Bestimmen Sie den Wert von $r_1$.

**Mögliche Lösung:**




Wenn sich in Urne 1 $r_1$ rote Kugeln befinden, dann gilt:

$w_1 = 5 - r_1$ ; $r_2 = 5 - r_1$ ; $w_2 = r_1$ ( $0 \le r_1 \le 5$ )

Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine rote Kugel auf den Tisch gelegt wird gilt:

$$P(r) = \frac{r_1}{5} \cdot \left(\frac{5-r_1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \frac{5-r_1}{5} \cdot \frac{5-r_1}{6}$$

Vereinfachen liefert:

$$P(r) = \frac{5r_1 - {r_1}^2 + r_1 + 25 - 10r_1 + {r_1}^2}{30} = \frac{25-4r_1}{30}$$

A: „Es wird eine rote Kugel auf den Tisch gelegt"

B: „Eine rote Kugel aus der Urne 1 wird auf den Tisch gelegt"

Es gilt: $P(B) = P(rr_{U1}) = \frac{r_1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{r_1}{30}$

bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(rr_{U1})}{P(r)} = \frac{\frac{r_1}{30}}{\frac{25-4r_1}{30}}$

➔ $P_A(B) = \frac{r_1}{25-4r_1} = \frac{4}{9}$ ➔ $9r_1 = 100 - 16r_1$ ➔ $25r_1 = 100$ ➔ $r_1 = 4$

➔ Zu Beginn befinden sich 4 rote Kugeln in der Urne 1.

**Mögliche Aufgabenstellung 2:**

Es wird zufällig eine Kugel aus Urne 1 gezogen und in Urne 2 gelegt. Danach wird zufällig eine Kugel aus Urne zwei gezogen und in Urne 1 gelegt.

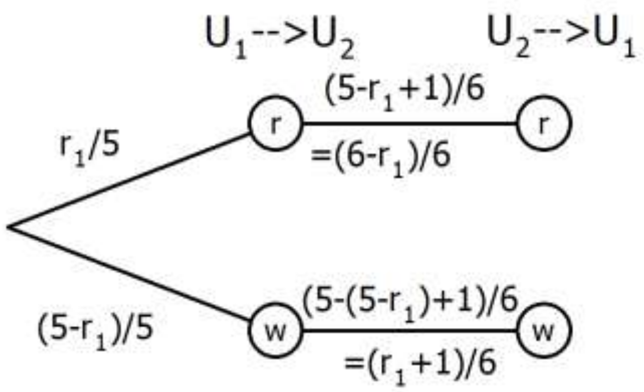
Betrachtet wird das Ereignis A:

A: „Die Anzahl der roten Kugeln in jeder Urne ist genauso groß wie zu Beginn".

Weisen Sie nach, dass gilt: $\mathrm{P(A)} = -\frac{1}{15}\mathrm{r_1}^2 + \frac{1}{3}\mathrm{r_1} + \frac{1}{6}$

**Mögliche Lösung:**

Ist die Anzahl der roten Kugeln in Urne 1 genauso groß wie zu Beginn, so gilt das auch für Urne 2. Es genügt also, Urne 1 zu betrachten:




$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{r_1}}{5} \cdot \frac{6-\mathrm{r_1}}{6} + \frac{5-\mathrm{r_1}}{5} \cdot \frac{\mathrm{r_1}+1}{6} = \frac{-2\mathrm{r_1}^2 + 10\mathrm{r_1} + 5}{30} = -\frac{1}{15}\mathrm{r_1}^2 + \frac{1}{3}\mathrm{r_1} + \frac{1}{6}$$