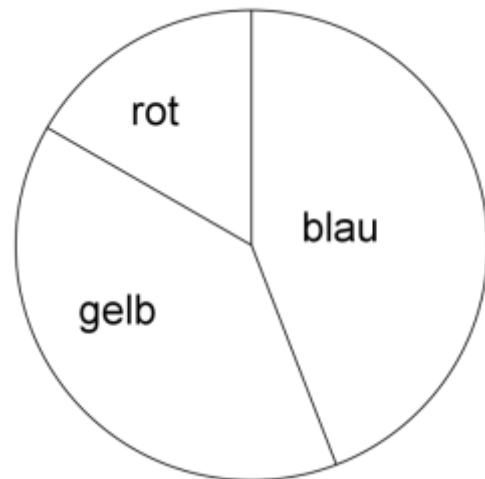


Klausuren Impuls 2 (Stochastik)

Ein Glücksrad (siehe Abb.) hat drei Sektoren. Die Wahrscheinlichkeit für „gelb“ ist bei diesem Glücksrad dreimal so groß, wie die Wahrscheinlichkeit für „rot“.



Mögliche Aufgabenstellung 1:

Sei p die Wahrscheinlichkeit für „rot“ bei einmaligem Drehen des Glücksrads.

Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Bestimmen Sie den Wert von p so, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man dabei zwei verschiedene Farben erhält, maximal wird.

Mögliche Lösung:

Es gilt: $P(rr) = p^2$; $P(gg) = (3p)^2 = 9p^2$; $P(bb) = (1 - 4p)^2$

Somit gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei verschiedene Farben erhält:

$$P(\text{versch.}) = f(p) = 1 - (p^2 + 9p^2 + (1 - 4p)^2) = 1 - (10p^2 + 1 - 8p + 16p^2)$$

$$\rightarrow f(p) = 8p - 26p^2$$

Gesucht ist das Maximum von f , für $0 < p < \frac{1}{4}$:

$$f'(p) = 8 - 52p ; f''(p) = -52 < 0$$

$$f'(p) = 8 - 52p = 0 \rightarrow p_1 = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

Wegen $f''(p_1) = -52 < 0$ liegt bei p_1 ein Maximum vor.

Da der Graph von f eine nach unten geöffnete Parabel 2. Ordnung ist, spielen die Randwerte keine Rolle.

Mögliche Aufgabenstellung 2:

Das Glücksrad wird dreimal gedreht. Dabei gewinnt man, wenn man drei unterschiedliche Farben erhält.

Untersuchen Sie, ob es eine Winkelweite für den roten Bereich gibt, für die die Gewinnwahrscheinlichkeit maximal wird.

Mögliche Lösung:

$$\text{Es gilt: } P(\text{rgb}) = 6 \cdot p \cdot 3p \cdot (1 - 4p) = 18p^2 - 72p^3 = f(p)$$

Es muss untersucht werden, ob f für $0 < p < \frac{1}{4}$ ein Maximum besitzt.

$$f'(p) = 36p - 216p^2 ; f''(p) = 36 - 432p$$

$$f'(p) = 36p - 216p^2 = 36p \cdot (1 - 6p) = 0 \rightarrow (p_1 = 0) ; p_2 = \frac{1}{6}$$

$$f''\left(\frac{1}{6}\right) = 36 - 432 \cdot \frac{1}{6} = -36 < 0$$

Wegen $f''(p_1) = -52 < 0$ liegt ein Maximum vor.

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Überprüfung der „Ränder“:

Da es sich um ein offenes Intervall handelt muss man eine Grenzwertbetrachtung machen:

$$p \rightarrow 0 \rightarrow f(p) \rightarrow 0$$

$$p \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow f(p) \rightarrow 0$$

Somit liegt bei p_2 ein Maximum vor.