



# Problemlöseaufgaben

Suchen – Finden – Gestalten

Ute Kleinknecht und Almut Zwölfer

# HINWEIS

Dies stellt nur einen kurzen Auszug aus der tatsächlichen Präsentation und dem tatsächlichen Material dar.

Weitere (auch editierbare) Materialien erhalten Sie beim Besuch der regionalen Fortbildung „Problemlösen im Mathematikunterricht.“

# Was sind Problemlöseaufgaben?

„Eine Problemlöseaufgabe (auch kurz: ein Problem) ist die Aufforderung eine Lösung zu finden, ohne dass ein passendes Lösungsverfahren auf der Hand liegt.“

(Büchter, Leuders, 2009, S. 28)

# Weitere Bezeichnungen:

## Problemlöseaufgabe

## Reichhaltige Lernaufgabe

(rich learning tasks)

Flewelling & Higginson (2003)

- Anwendung von Wissen in kreativer, zweckvoller Weise
- Entwicklung eines nachhaltigen Verständnisses der Inhalte
- Aufbau von Überzeugungen und Haltungen für sinnstiftendes Mathematiktreiben

# Weitere Bezeichnungen:

Problemlöseaufgabe

Reichhaltige Lernaufgabe  
(rich learning tasks)

## Offene Aufgabe:

Lernende haben Entscheidungsspielräume, z.B. bei

- Interpretation der Aufgabenstellung
- Auswahl von Hilfsmitteln
- Lösungsweg
- Darstellung von Antworten...

# Weitere Bezeichnungen:

Problemlöseaufgabe

Reichhaltige Lernaufgabe  
(rich learning tasks)

Offene Aufgabe

Produktive Aufgabe

- Ermöglicht das Sammeln von Erfahrungen
- Nicht notwendigerweise außermathematische Bezüge
- Stofflich eher begrenzt, aber offen im Lösungsweg

(Herget et al., 2001, S. 14)

# Weitere Bezeichnungen:

Problemlöseaufgabe

Reichhaltige Lernaufgabe  
(rich learning tasks)

initiiieren bei den Lernenden  
produktive Problemlöseprozesse

Offene Aufgabe

Produktive Aufgabe

**Problemlöseaufgaben sind keine Routineaufgaben!**

Achtung: in der anglo-amerikanischen Literatur werden Aufgaben oft generell als „*problems*“ bezeichnet – also auch Routineaufgaben!



# Weitere Bezeichnungen:

Problemlöseaufgabe

Reichhaltige Lernaufgabe

Offene Aufgabe

Produktive Aufgabe

**initiieren bei den Lernenden  
produktive Problemlöseprozesse  
Problemlöseaufgaben sind keine  
Routineaufgaben!**

**KOGNITIVE**

HERAUSFORDERNDE AUFGABEN

**AKTIVIERUNG**

**KOGNITIVE**

ENGAGEMENT DER SUS

**AKTIVIERUNG**

**KOGNITIVE**

VERSTÄNDNISORIENTIERUNG

**AKTIVIERUNG**



# Weitere Bezeichnungen:

Problemlöseaufgabe

Reichhaltige Lernaufgabe

Offene Aufgabe

Produktive Aufgabe

initiieren bei den Lernenden  
 produktive Problemlöseprozesse.

Problemlöseaufgaben sind keine  
 Routineaufgaben!

Ob eine derartige  
 Aufgabe tatsächlich  
 Problemlösen initi-  
 iert, hängt auch von  
 den **Vorkenntnissen**  
 der **Lernenden** und  
 der **Gestaltung des**  
**Unterrichts** ab.

# Problemlöseaufgaben finden

„Eine Problemlöseaufgabe (auch kurz: ein Problem) ist die Aufforderung eine Lösung zu finden, ohne dass ein passendes Lösungsverfahren auf der Hand liegt.“

(Büchter, Leuders, 2009, S. 28)

„Problemlösen ist das , was man tut, wenn man nicht weiß, was man tun soll.“

(G.H. Wheatly)

**Woran erkennt man eine gute Problemlöseaufgabe?**

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 1) Offenheit:

Geschlossene Aufgaben	Offene Aufgaben
Lösungsweg i.a. sofort erkennbar	Lösungsweg nicht sofort erkennbar
	Mehrere Lösungsansätze möglich
Eindeutige Lösung	Oft mehrere mögliche Lösungen
„Abarbeiten“ bekannter Algorithmen	Überwindung von Barrieren erforderlich Entscheidungsspielräume

**Ausbildung komplexerer Denkstrukturen**

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

	Aufgabentyp	Start	Weg	Ziel	Problemlösen?
1	Beispielaufgabe	x	x	x	ungeeignet
2	Geschlossene Aufgabe	x	x	-	ungeeignet
3	Begründungsaufgabe	x	-	x	bedingt geeignet
4	Problemaufgabe	x	-	-	geeignet
5	Offene Situation	-	-	-	geeignet
6	Umkehraufgabe	-	x	x	bedingt geeignet
7	Problemumkehr	-	-	x	geeignet
8	Anwendungssuche	-	x	-	bedingt geeignet

Quelle: ZPG V – Rückwärtsarbeiten (Wagner)

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 2) Differenzierungsvermögen:

Weitverbreitete Meinung:

*„Problemlösen ist schwierig und nichts für schwächere Lernende.“*

- Häufig bearbeiten schwächere Lernende nur Routineaufgaben und erwerben keine Problemlösekompetenzen.
- Der Erwerb von Problemlösekompetenzen ist für diese Lernenden mindestens genauso wichtig!

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 2) Differenzierungsvermögen:

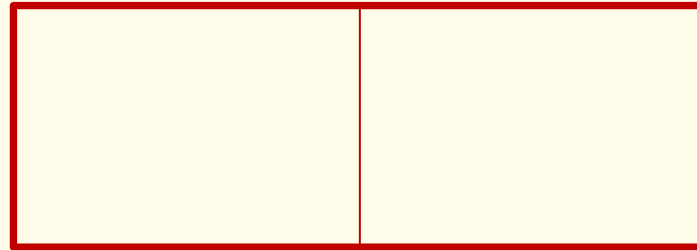
Gute Problemlöseaufgaben ermöglichen allen Lernenden sinnvolles mathematisches Arbeiten.



# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 2) Differenzierungsvermögen:

### a) Paralleldifferenzierung



Lernende bearbeiten unterschiedliche, aber inhaltlich analoge Aufgaben.

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

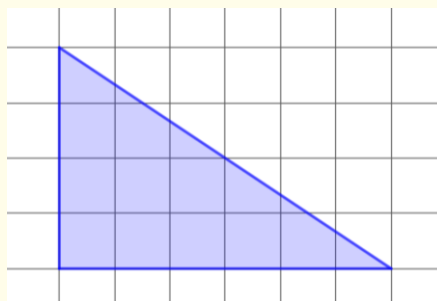
## 2) Differenzierungsvermögen:

### a) Paralleldifferenzierung

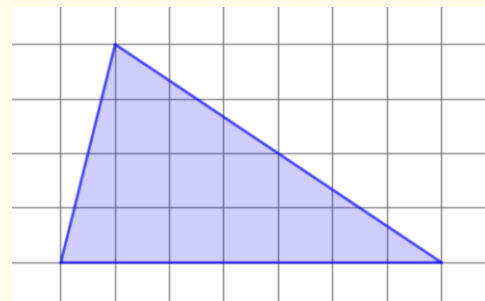
Beispiel:

Einstieg  
Flächeninhalt  
Dreiecke

Bestimme den Flächeninhalt: (□)



Bestimme den Flächeninhalt: (□□)



Darauf achten, dass auch im niedrigen Niveau Problemlösen stattfindet!

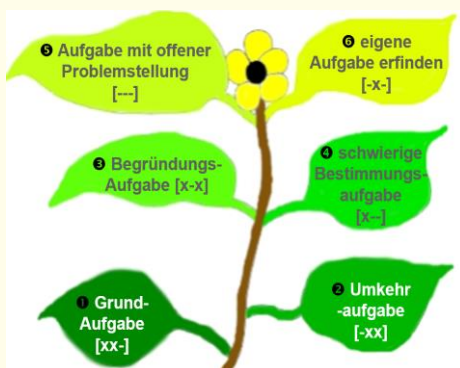


# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 2) Differenzierungsvermögen:

### b) Stufendifferenzierung

Teilaufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad/ steigender Offenheit  
Nicht alle bearbeiten alle Stufen.

Spezialfall: **Blütenaufgaben**

☐ Zunehmende Offenheit

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 2) Differenzierungsvermögen:

### b) Stufendifferenzierung bei Problemlöseaufgaben

Verständnisklärender Einstieg („Rampe“)

Kernaufgabe (eigentliches Problem)

Vertiefung für Stärkere/Schnellere

Ermöglicht Schwächeren Zugang zur Aufgabe, kein großer Aufwand für Stärkere

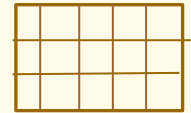
# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 2) Differenzierungsvermögen:

### b) Stufendifferenzierung bei Problemlöseaufgaben

Beispiel:

a) Auf wie viele Personen  
kann die Schokoladen-  
tafel gerecht aufgeteilt werden?



b) Untersuche zwei weitere Tafeln.

Verständnisklärender Einstieg („Rampe“)

Kernaufgabe (eigentliches Problem)

Vertiefung für Stärkere/Schnellere

Finde die ideale Schokoladentafel  
(d.h. die Tafel, die an möglichst viele  
verschiedene Anzahlen von Personen  
gerecht aufgeteilt werden kann.)

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 2) Differenzierungsvermögen:

### c) Selbstdifferenzierende Aufgaben



Alle Lernenden bearbeiten dieselbe Aufgabe, aber – abhängig von ihren Fähigkeiten – auf unterschiedlichen Niveaus.

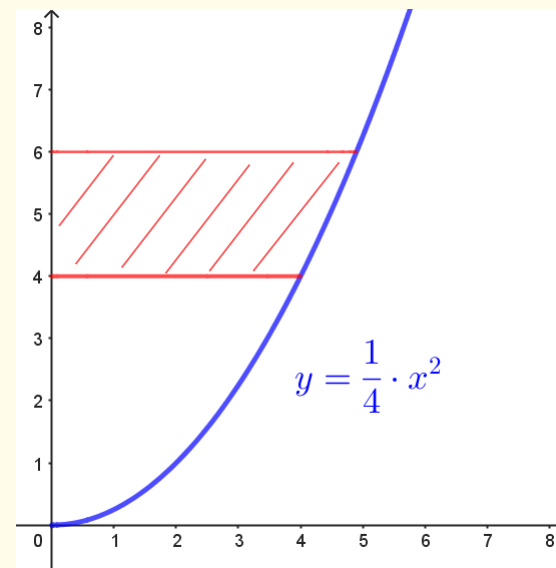
# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 2) Differenzierungsvermögen:

### c) Selbstdifferenzierende Aufgaben

Beispiel:

- Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.
- Finden Sie möglichst viele weitere Möglichkeiten zur Berechnung des Flächeninhalts. (Beschreiben Sie durch Integrale).



# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 3) Authentizität:

**„Mathematikaufgaben sind authentisch, wenn sie Schülerinnen und Schüler zu mathematischen Tätigkeiten anregen, die typisch für die Entstehung und Anwendung von Mathematik sind.“**

(Büchter, Leuders, 2009, S. 86)

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 3) Authentizität:

Bezogen auf Problemlöseaufgaben:

- Aufgabe muss tatsächlich Problemcharakter haben:  
Barrieren aufweisen
- Aufgabe muss zu für das Problemlösen typischen Tätigkeiten anregen:
  - Vermutungen und Fragestellungen finden
  - Auswahl unterschiedlicher Ansätze/Lösungen
  - Interpretation von (Zwischen-)Ergebnissen
  - ...

# Kriterien für Problemlöseaufgaben

## 3) Authentizität:

Bezogen auf Problemlöseaufgaben:

- Aufgabe muss tatsächlich Problemcharakter aufweisen  
Barrieren aufweisen
- Aufgabe muss zu für das Problem  
anregen:
  - Vermutungen und Fragestellungen
  - Auswahl unterschiedlicher Lösungsansätze
  - Interpretation von (Zwischen-)Ergebnissen
  - ...

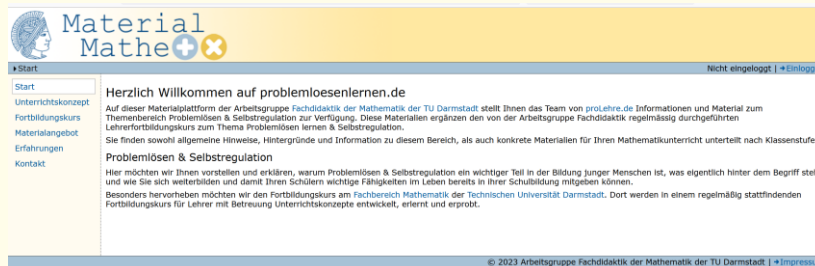




# Problemlöseaufgaben suchen/finden

## Internetadressen:

<http://www.problemloesenlernen.dvlp.de/>



- Plattform der TU Darmstadt (Prof. Regina Bruder)
- Materialien nach Klassenstufe und Thema geordnet

<https://proffi-m.de/>

- „**Pro**blemlösen **F**ördern und **F**ordern im **M**athematikunterricht“
- Umfangreiche Materialsammlung (incl. didaktischer Anmerkungen)
- Zahlreiche Filterkriterien (u.a. heuristische Strategien und Prinzipien, Schwierigkeitsgrad)

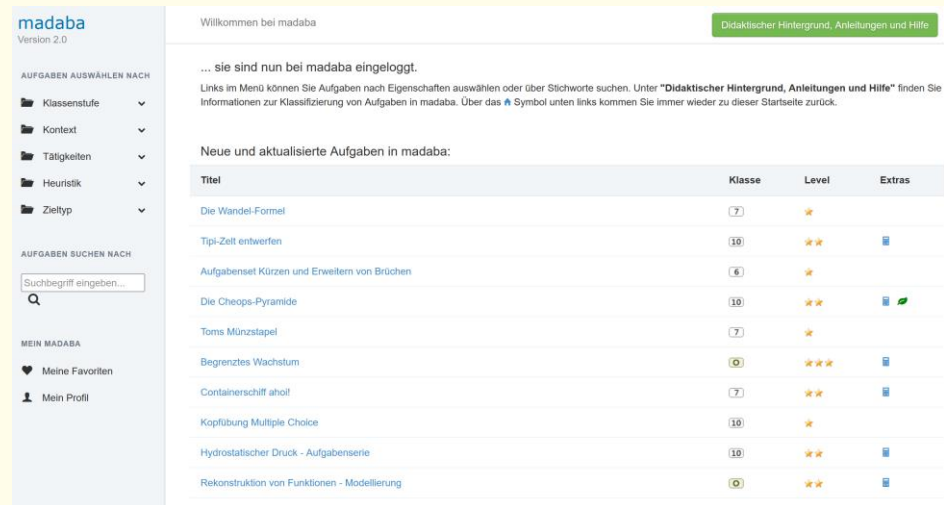


# Problemlöseaufgaben suchen/finden

## Internetadressen:

<https://www.madaba.de>

- Kostenpflichtige Plattform der TU Darmstadt (Prof. Regina Bruder)
- Sehr umfangreich
- Materialien nach Klassenstufe und Thema geordnet
- Zahlreiche Filterkriterien (u.a. heuristische Strategien und Prinzipien, Schwierigkeitsgrad)



The screenshot shows the madaba platform interface. On the left is a sidebar with navigation options: 'AUFGABEN AUSWÄHLEN NACH' (Klassenstufe, Kontext, Tätigkeiten, Heuristik, Zieltyp) and 'AUFGABEN SUCHE NACH' (Suchbegriff eingeben...). Below this is 'MEIN MADABA' with links to 'Meine Favoriten' and 'Mein Profil'. The main content area is titled 'Willkommen bei madaba' and includes a welcome message, a table of 'Neue und aktualisierte Aufgaben in madaba:', and a list of tasks with their respective class, level, and extras.

Titel	Klasse	Level	Extras
Die Wandel-Formel	7	★	
Tipi-Zelt entwerfen	10	★★	📄
Aufgabenset Kürzen und Erweitern von Brüchen	6	★	
Die Cheops-Pyramide	10	★★	📄 🌱
Toms Münzstapel	7	★	
Begrenztes Wachstum	9	★★★★	📄
Containerschiff ahoi!	7	★★	📄
Kopfabung Multiple Choice	10	★	
Hydrostatischer Druck - Aufgabenserie	10	★★	📄
Rekonstruktion von Funktionen - Modellierung	9	★★	📄

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

**Kein vertrautes Verfahren – neue Wege sind notwendig!**




- ➔ Aufgaben öffnen
- ➔ Erstkontakt:  
Aufgaben aus höheren Klassenstufen stellen
- ➔ Probleme selber finden lassen: *problem posing*

***Problemlöseaufgaben sind das Gegenteil von  
Routineaufgaben!***



# Problemlöseaufgaben selber gestalten




**Kein vertrautes Verfahren – neue Wege sind notwendig!**

- 
 Aufgaben öffnen
- 
 Erstkontakt:  
 Aufgaben aus höheren Klassenstufen stellen
- 
 Probleme selber finden lassen: *problem posing*

***Aber: Routineaufgaben können zunächst  
 Problemlöseaufgaben sein***

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

Kein vertrautes Verfahren – neue Wege sind notwendig!

-  I Aufgaben öffnen
-  II Erstkontakt:  
Aufgaben aus höheren Klassenstufen stellen
-  III Probleme selber finden lassen:  
*problem posing*

**Aber: Viele Problemlöseaufgaben sind später  
Routineaufgaben**

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

## Aufgaben öffnen:

Bei Standardaufgaben

- Gezielt Informationen weglassen
- Aufgabenstellung umdrehen
- Variation der Ausgangssituation
- Aufforderung zur Begründung

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

## Aufgaben öffnen:

Bei Standardaufgaben

- **Gezielt Informationen weglassen**
- Aufgabenstellung umdrehen
- Variation der Aufgabenstellung
- Aufforderung zur Lösung

**Ein Beispiel**

Bsp Klasse 5

Statt Routineaufgabe:  
**Bestimme alle Teiler von 52.**



***Welche Zahl unter 100 hat die meisten Teiler?***

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

## Aufgaben öffnen:

Bei Standardaufgaben

- Gezielt Informationen weglassen
- Aufgabenstellung umdrehen
- Variation der Ausgangssituation
- Aufforderung zur Begründung

**Weitere Beispiele  
werden bei der  
Fortbildung vorgestellt.**



# Problemlöseaufgaben selber gestalten

## Erstkontakt:

Die Vorkenntnisse des Lernenden sind wichtig



Aufgabe aus einer höheren Klassen-  
stufe stellen

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

## Erstkontakt:

### Klasse 9:

Bestimmung der Fläche  
und des Umfangs eines  
Kreises

**Standardaufgabe**

### Klasse 6:

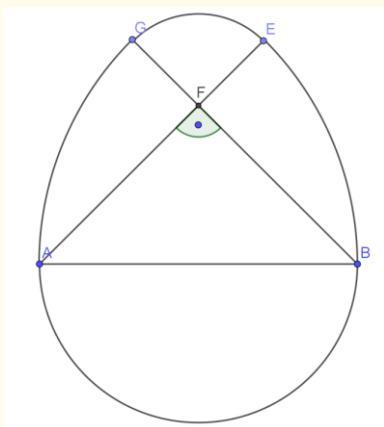
Verfahren entwickeln  
zur Bestimmung der  
Fläche und des  
Umfangs eines Kreises

**Neue Problemstellung**

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

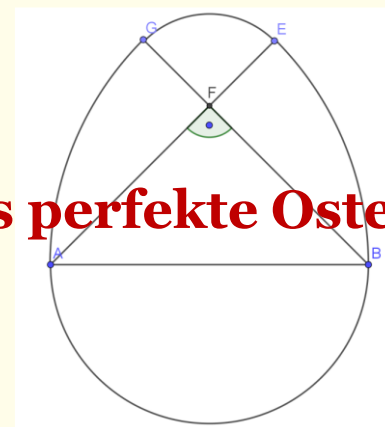
Erstkontakt:

Klasse 9:



Standardaufgabe

Klasse 6:



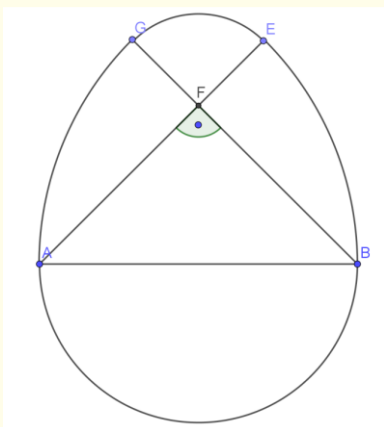
**Das perfekte Osterei**

Neue Problemstellung

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

## Das perfekte Osterei – ein Unterrichtsbeispiel

**Klasse 9:**



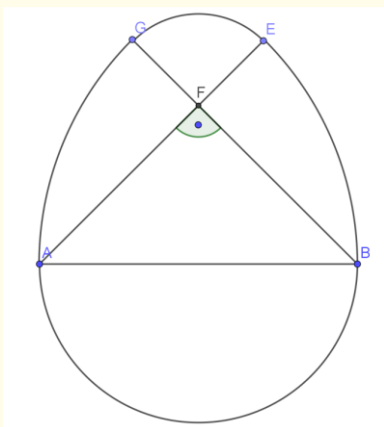
*Berechnung des Umfangs und des Inhalts der Fläche*

**UE: Kreisausschnitte**

# Problemlöseaufgaben selber gestalten

## Das perfekte Osterei – ein Unterrichtsbeispiel

**Klasse 6:**



*Berechnung des Umfangs und des Inhalts der Fläche*

**UE: Kreisumfang und Kreisfläche**

# Konkret: Ein Unterrichtsbeispiel

## Der Arbeitsauftrag

Die SuS erhalten

- Arbeitsblatt
- Mehrere Kopien der Eifigur
- Zeitspanne: 40'

## Vorbereitung:

- Gemeinsames Lesen des AA
- Fragerunde
- Gemeinsames Messen  
(wichtige Größen)

## Das perfekte Osterei

Problemlösen im Mathematikunterricht

**DAS PERFEKTE OSTEREI**

Wie groß ist der Umfang des perfekten Ostereis?  
Für Forscher\*innen: Und wie groß ist die Fläche?



**Du benötigst:**  
Geodreieck, Zirkel und deinen Kopf.  
Überlege Dir zuerst, wie sich dieses Osterei konstruieren lässt.  
Wichtige Größen:

Radius  
Radius  
Radius  
Winkel




Platz für Ideen und Rechnungen:

# Fazit: Problemlöseaufgaben

Problemlösecharakter einer Aufgabe hängt ab

- vom Inhalt (unbekannt, mehrschrittig, komplex)
- von der Aufgabenstellung (ungewohnt, offen)
- vom Zeitpunkt der Bearbeitung (Vorwissen, Erstkontakt)
- vom Lernenden (Vorwissen, Routine erreicht)

# Fazit: Problemlöseaufgaben

- 
 Problemlöseaufgaben sind das Gegenteil von Routineaufgaben.
- 
 Routineaufgaben können anfangs Problemlöseaufgaben sein.
- 
 Viele Problemlöseaufgaben sind später Routineaufgaben .



# Literatur

- Büchter, Andreas; Leuders, Timo (2009): Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern – Leistung überprüfen. 4. Auflage. Berlin: Cornelsen.
- Holzäpfel, Lars; Lacher, Martin; Leuders, Timo; Rott, Benjamin (2018): Problemlösen lehren lernen. Wege zum mathematischen Denken. 1. Auflage. Seelze: Kallmeyer/Klett.
- Wagner, Ulrich (2016): Problemlösen am Beispiel des Rückwärtsarbeitens. ZPG V, Bildungsplan 2016, Standards 8.
- Wheatley, Grayson H.(1984): problemsolving in school mathematics. MEPS Technical Report 84.01. School Mathematics and Science Center, Purdue University, West Lafayette.