



# Problem Posing

Tobias Gauß

# HINWEIS

Dies stellt nur einen kurzen Auszug aus der tatsächlichen Präsentation und dem tatsächlichen Material dar.

Weitere (auch editierbare) Materialien erhalten Sie beim Besuch der regionalen Fortbildung „Problemlösen im Mathematikunterricht.“

# TAGESORDNUNG

2

## Problemlöseaufgaben

- Kriterien und Quellen für gute Problemlöseaufgaben
- Problemlöseaufgaben mit dem Schulbuch entwickeln
- Problemlösen in IQB- und Abituraufgaben

Ergänzung: externe Referenten (Wildbad ONLY)

- **Problem-Posing: Probleme finden (lassen)**
- Einsatz von Wettbewerbsaufgaben
- universelle Aufgabenformate

Venn-Diagramme, Arithmagons, Open Middle Problems

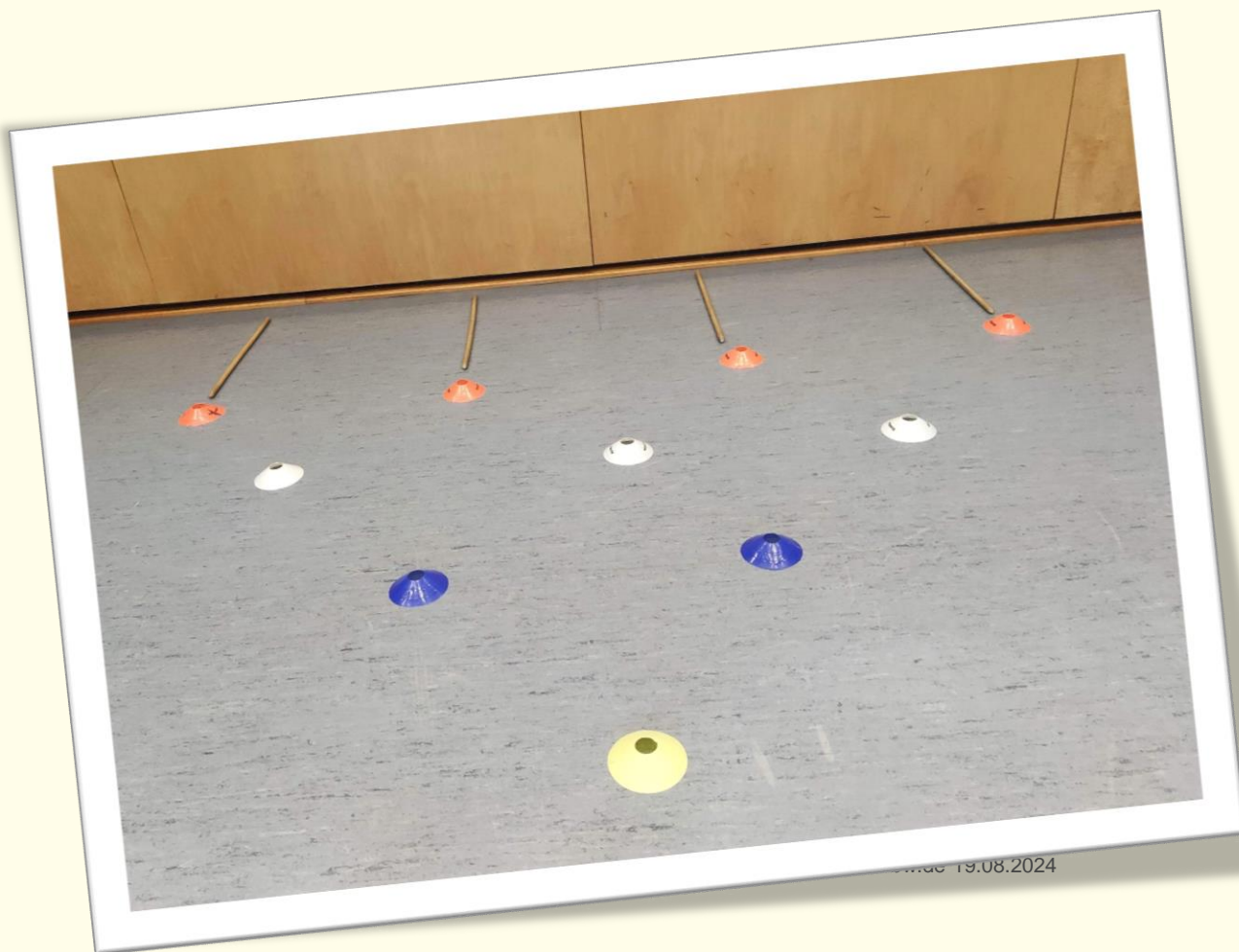


## Bildungsplan BW - Leitgedanken zum Kompetenzerwerb:

*„Vermutungen äußern, **Fragen stellen**, recherchieren und Informationen auf Relevanz untersuchen, (...) sind Ziele und Bestandteile des Mathematikunterrichts“*

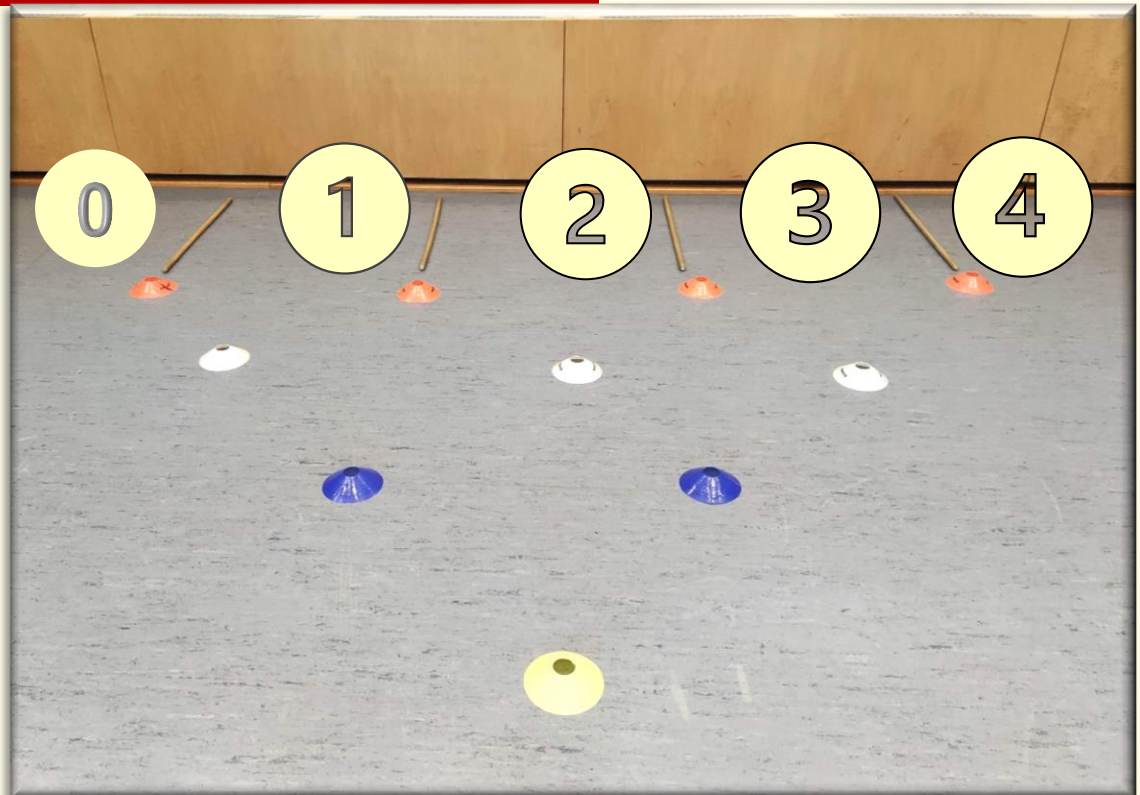
# Lebendiges Galtonbrett

Umsetzungsbeispiel zum Problemfinden durch SuS



... nun folgt etwas  
bewegter Unterricht

# Lebendiges Galtonbrett – Experiment

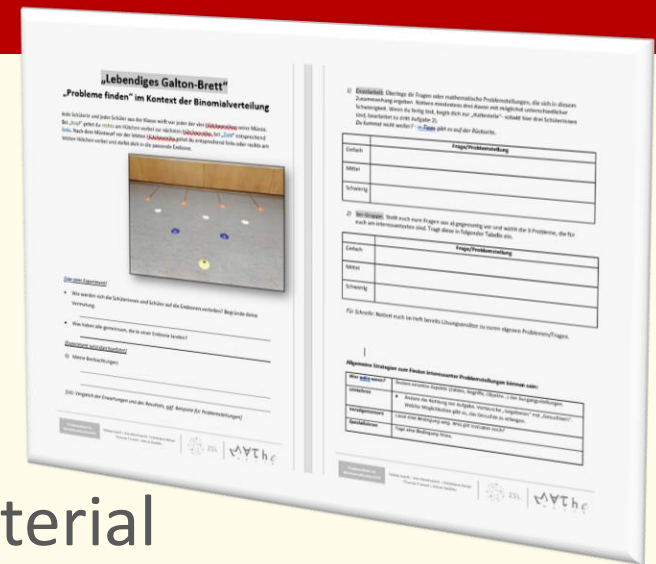


*Jede Schülerin und jeder Schüler aus der Klasse wirft vor jeder der vier Hütchenreihen eine Münze. Bei „Kopf“ gehst du rechts am Hütchen vorbei zur nächsten Hütchenreihe, bei „Zahl“ entsprechend links. Nach dem Münzwurf vor der letzten Hütchenreihe gehst du entsprechend links oder rechts am letzten Hütchen vorbei und stellst dich in die passende Endzone*

# Lebendiges Galtonbrett

## Zum Unterrichtsbeispiel

- Begleitendes S-Arbeitsblatt im Material
- Fokus: Beteiligung der SuS am Problemfindungsprozess
- Verschiedene Vorschläge für Umgang mit gefundenen Problemen am Ende der Präsentation



# Unterrichtsgang – Grobstruktur

**Durchführung  
des Experiments**

**Entwicklung und  
Sammlung der  
Problemstellungen**

**Lösen der  
Probleme**



# Unterrichtliche Umsetzung

## Vorwissen der SuS

- Wahrscheinlichkeitsrechnung der Mittelstufe
- Nicht (zwangsläufig): Formel von Bernoulli

## Kognitive Aktivierung vor der Durchführung

- „Wie werdet ihr euch auf die Endzonen verteilen?“
- Ggf. „Was haben alle gemeinsam, die in einer Endzone landen?“ (Anzahl Treffer)

Schwierigkeitsstufe	Frage/Problemstellung
einfach	
mittelmäßig	
schwierig	

## Nach der Durchführung

- **EA:** Problemstellungen (Fragen) überlegen

Tipps auf AB

Ggf. Beispiele durch L

- **PA:** Einigung auf die „besten Probleme“ je Schwierigkeitsstufe

z.B.: Lerntempoduett  
Alternativ: 3-er Gruppe



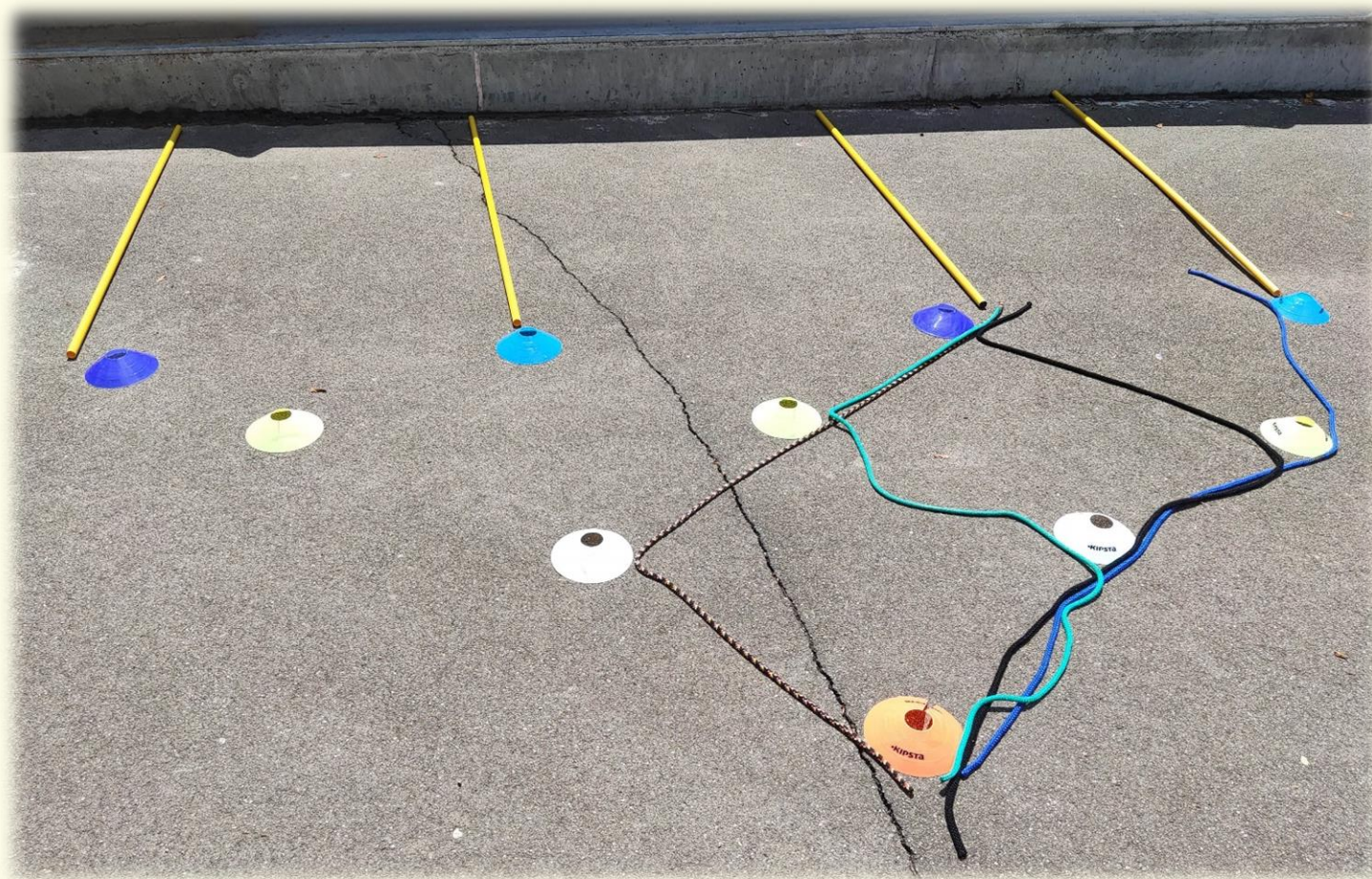
# Welche Fragestellungen erwarten Sie?

# Einfache Problemstellungen

- Warum sind die meisten in der Mitte?
- Wie wahrscheinlich ist es ganz links (genau in der Mitte) zu landen?
- Finde eine Formel, mit der man die Wahrscheinlichkeit berechnen kann in einer bestimmten Endzone zu landen.
- In welchem Feld landet man am wahrscheinlichsten, wenn man statt einer Münze einen Würfel nimmt (Treffer: Augenzahl 6)
- Bestimme die Anzahl der Seile, die in jede Zone führt, wenn man 10- mal die Münze wirft

Alle diese Fragen sind...  
 ... für SuS (zu diesem Zeitpunkt) echte Probleme  
 ... ohnehin im Unterrichtsverlauf zu klären

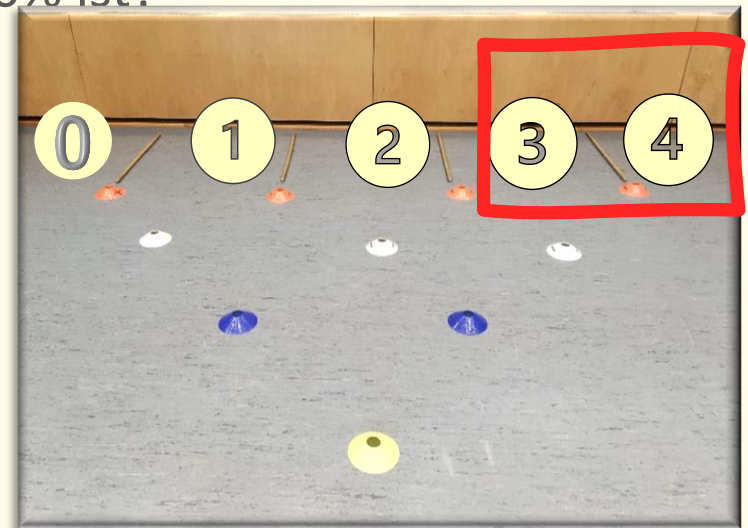
Bestimme die Anzahl der Seile, die in jede Zone führt, wenn man 10- mal die Münze wirft





# Mittelschwierige Problemstellungen

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einer Endzone rechts von der Mitte zu landen?
- Wenn 3 Leute laufen, wie wahrscheinlich ist es, dass alle in der Mitte landen?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass die Hälfte genau in der Mitte steht (Klassengröße 24)?
- Wie groß müsste  $p$  mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit in der rechten Endzone zu landen mindestens 20% ist?



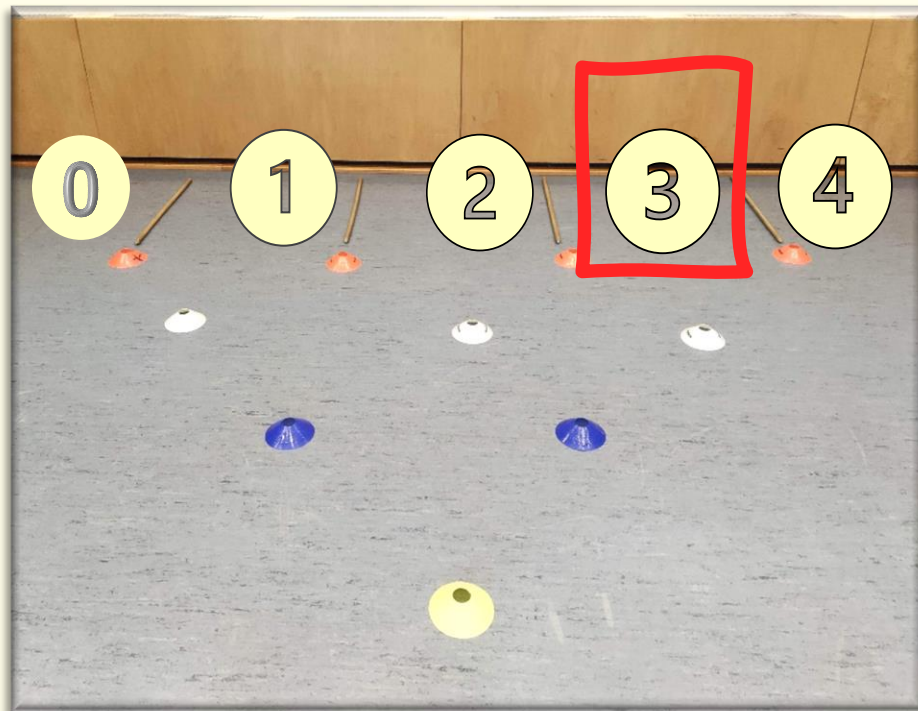
# Mittelschwierige Problemstellungen

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einer Endzone rechts von der Mitte zu landen?
- Wenn 3 Leute laufen, wie wahrscheinlich ist es, dass alle in der Mitte landen?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass die Hälfte genau in der Mitte steht (Klassengröße 24)?
- Wie groß müsste  $p$  mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit in der rechten Endzone zu landen mindestens 20% ist?

Ursprüngliche S-Frage (sinngemäß):  
Wie groß muss  $p$  sein, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% **in der Mitte** landet?

# Schwierige Problemstellungen (Auszug)

- Wenn fünf SchülerInnen das Experiment durchführen: Wie wahrscheinlich ist es, dass in jeder Endzone genau eine(r) landet?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer Zone niemand steht (Klassengröße 24)?
- Wie groß müsste  $p$  sein, damit die Wahrscheinlichkeit in Feld 3 zu landen am größten ist?





# Schwierige Problemstellungen (Auszug)

- Wenn fünf SchülerInnen das Experiment durchführen: Wie wahrscheinlich ist es, dass in jeder Endzone genau eine(r) landet?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer Zone niemand steht (Klassengröße 24)?
- Wie groß müsste  $p$  sein, damit die Wahrscheinlichkeit in Feld 3 zu landen am größten ist?

Welche Lösungsansätze/Strategien fallen Ihnen zum letzten Problem ein?

# Wie groß müsste $p$ sein, damit die Wahrscheinlichkeit in Feld 3 zu landen am größten ist?

## Systematisches Probieren

Vorüberlegung:  $p \geq 0,5$

$p = 0,6$ :

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^1$$

$$= \binom{4}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2$$

$$= P(X = 2)$$

Analog für  $p=0,8$  und  $P(X=4)$

## Algebraischer Ansatz

*Ges.: kleinstes  $p$*

$$P(X = 2) = P(X = 3)$$

$$6p^2(1 - p)^2 = 4p^3(1 - p)$$

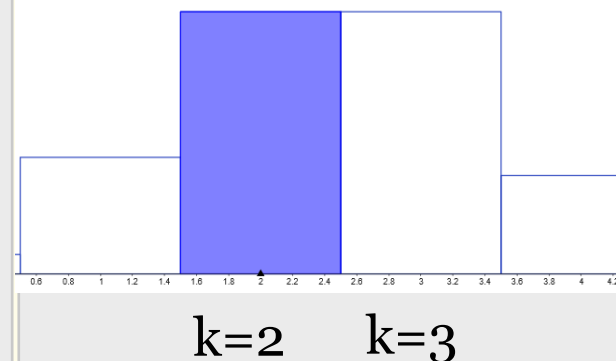
$\vdots$

$$p = \frac{3}{5}$$

Größtes  $p$  analog

## Mit Hilfsmitteln

$p=0,6$



$$p \in ]0,6; 0,8[$$

## Weitere mögliche Problemstellungen

z.B.:

- **n gesucht:** Wie viele SchülerInnen müssen das Experiment mindestens mitmachen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % die Endzone ganz rechts (jede Endzone) besetzt ist.
- ...

## Weitere Problemstellungen der SuS

Teilweise trivial, sehr unscharf oder ausufernd

- *Was passiert, wenn eine Hütchenreihe dazu kommt?*
- *?? Was ist die Wahrscheinlichkeit?*
- *?? Wie lautet das Experiment mit einem Würfel?*
- *Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur zwei Endzonen besetzt werden?*
- *??? Was passiert, wenn man mehr Seile nimmt?*

# Lebendiges Galtonbrett – Begleitmaterial

- S-Arbeitsblatt
- Exemplarische Sammlung der Problemstellungen in einer 10. Klasse
- Bilder zum Aufbau des Galton-Bretts



# Lebendiges Galtonbrett – möglicher Unterrichtsgang

**Durchführung des  
Experiments**

**Entwicklung und  
Sammlung der  
Problemstellungen**

**Lösen der  
Probleme**

## Lehrkraft

- strukturiert Problemstellungen
- greift sie an passender Stelle im Unterrichtsgang wieder auf

Durchführung  
des  
Experiments

Entwicklung  
und Sammlung  
der  
Problemstellungen

**Lösen der Probleme**

## SuS

- wählen (ggf. mit Überarbeitung) selbst Problemstellungen, die sie in der Folge selbst bearbeiten



# Lebendiges Galtonbrett – pragmatische Hinweise

- Entsprechende Hütchen und Seile gibt es in jeder Sporthalle
- Alternativ kann auch mit Kreide auf den Schulhof gemalt oder Post-its geklebt werden
- Es gibt eine Endzone mit 0 Treffern. Mit der Klasse sollte vereinbart werden, ob dies „Zone 0“ oder „Zone 1“ ist
- Schöner Anschlussauftrag:  
*„Stellt euch (stumm) so auf, wie ihr wohl stündet, wenn ihr statt einer Münze einen Würfel/Reißnagel/... genutzt hättet.“*





# Fazit: Lebendiges Galtonbrett

- Eigene Problemformulierung war für SuS motivierend
- Gute Planung für Problembearbeitungsphase notwendig
- Bild des *lebendigen Galtonbretts* kann immer wieder aufgegriffen werden und bleibt im Gedächtnis (z.B.: Anzahl Seile → Binomialkoeffizient)
- Erstaunlich variantenreiche und interessante Problemfindungen durch SuS
- Fragestellungen machen Verständnisprobleme sichtbar
- Selbstdifferenzierend

## Fazit: „Problem Posing“ kann...

- Arbeitsweisen von MathematikerInnen vermitteln
- Umgang mit offenen Aufgaben verbessern
- realistisches Alltags-Szenario sein
- Authentizität des Mathematiktreibens erhöhen
- Lernstandsdiagnose ermöglichen
- Angst vor Mathematik nehmen

(Vgl. Holzäpfel et al. *Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken*, Seelze: 2018, S. 227ff)

- Übung zum „Prompten“ von KI sein(?)

## Fazit: „Problem Posing“ kann...

- Arbeitsweisen von MathematikerInnen vermitteln
- Umgang mit offenen Aufgaben verbessern
- realistisches Alltags-Szenario sein
- Authentizität des Mathematiktreibens erhöhen
- Lernstandsdiagnose ermöglichen
- Angst vor Mathematik nehmen



(Vgl. Holzäpfel et al. *Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken*, Seelze: 2018, S. 227ff)