



# Problemlösen unterrichten – Teil 1

Ute Kleinknecht und Christiane Reher

# HINWEIS

Dies stellt nur einen kurzen Auszug aus der tatsächlichen Präsentation und dem tatsächlichen Material dar.

Weitere (auch editierbare) Materialien sowie methodisch-didaktische Hinweise zur Gestaltung der Unterrichtsstunden erhalten Sie beim Besuch der regionalen Fortbildung „Problemlösen im Mathematikunterricht.“

# Problemlösen im MU

## Problemlösen als Lernziel

Problemlösekompetenz  
erwerben

in eigenständigen Problem-  
lösestunden

in den regulären Unterricht  
integriert

## Problemlösen als Lernprinzip

Problemlösekompetenz  
anwenden

in den regulären Unterricht  
integriert

# Problemlösen unterrichten:

## Variante 1: („explizit“)

### Eigenständige Problemlösestunden bzw. –einheiten

- Fokus auf Vermittlung von Problemlösekompetenzen
- losgelöst von den aktuellen Inhalten des Mathematikunterrichts

## Variante 2: („integriert“)

### Problemlösen im regulären Mathematikunterricht

- Einbau von Problemlöseaktivitäten in den regulären Unterrichtsverlauf
- In allen Unterrichtsphasen möglich



# 1. Eigenständige Problemlösestunden

## Anforderungen an geeignete Aufgaben:

- Inhaltlich passend
  - Nicht zu leicht und nicht zu schwer
  - Wenig mathematisches Vorwissen, aber durchaus auch mathematische Inhalte (z.B. Kombinatorik propädeutisch, Pentominos...)
- Zugang für alle Lernenden möglich (→ „Differenzierungsvermögen“)
- Verschiedene Strategien und Darstellungsformen möglich (→ „Offenheit“)
- Anstoß mathematischer Prozesse
  - Aufgabentyp „Lege ein Zündholz so um, dass...“ nicht geeignet!
- Lösungsprozess steht im Vordergrund, nicht die Lösung!



# 1. Eigenständige Problemlösestunden

## Beispiel:

### Aufgabe: „Fünferformen“



Wie viele verschiedene zusammenhängende Figuren aus 5 gleich großen Quadraten gibt es?

Wie kannst du sicher sein, dass du alle gefunden hast?  
Dokumentiere deine Überlegungen vollständig.

Puffer: Finde eine ähnliche Aufgabenstellung.

(nach Holzäpfel, 2018, S. 102 ff.)

## 2. Problemlösen vermitteln im regulären MU

### Anforderungen an geeignete Aufgaben:

- Beim Erarbeiten: Aufgabe muss auf den Kern des Unterrichtsthemas hinführen
- Verschiedene Strategien, Darstellungsformen und Lösungswege möglich (→ „Offenheit“)
- Passung: geeigneter Schwierigkeitsgrad

# Herausforderungen beider Ansätze:

## Variante 1: („explizit“)

### Eigenständige Problemlösestunden bzw. –einheiten

- Übertragung der erworbenen Problemlösekompetenzen auf den regulären Unterricht gelingt nicht immer.
- Entstehung von Fehlvorstellungen:  
Problemlösen als spezielles, „exotisches“ Thema aufgefasst, nicht als grundlegende Kompetenz.



## Variante 2: („integriert“)

### Problemlösen vermitteln im regulären Mathematikunterricht

- Überforderung der SuS durch gleichzeitigen Erwerb von neuem Wissen (neue Inhalte) und von Problemlösekompetenzen  
Abhilfe:
  - Problemlösen bei inhaltlich einfachen Themen
  - Zeitliche Trennung beider Diskussionsebenen



# Kombination beider Ansätze:

- Explizite (eigenständige) Behandlung von Komponenten des Problemlösens (Heuristiken, Strategien, Darstellungsmöglichkeiten ...)
- Einüben dieser Kompetenzen an Problemstellungen aus dem regulären Unterricht

# 1. Eigenständige Problemlösestunden

**Weitere Möglichkeit:**

## Strategietraining

- Regelmäßige gezielte Vermittlung von Problemlösestrategien
- Curricularer Aufbau
- vgl. Vortrag „Strategietraining und Strategiefächer“

# 1. Eigenständige Problemlösestunden

## Strategietraining und Strategiefächer



## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining

Die Schülerinnen und Schüler können
Probleme analysieren
<ol style="list-style-type: none"> <li>das Problem mit eigenen Worten beschreiben</li> <li>Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten</li> <li>durch Verwendung verschiedener Darstellungen (<u>informative Figur</u>, verbale Beschreibung, <u>Tabelle</u>, <u>Graph</u>, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen oder umformulieren</li> <li>Hilfsmittel und Informationsquellen (zum Beispiel Formelsammlung, Taschenrechner, Computerprogramme, Internet) nutzen</li> </ol>
Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln
<ol style="list-style-type: none"> <li>durch Untersuchung von Beispielen und <u>systematisches Probieren</u> zu Vermutungen kommen und diese auf Plausibilität überprüfen</li> <li>das Problem durch <u>Zerlegen in Teilprobleme</u> oder das Einführen von Hilfsgrößen oder Hilfslinien vereinfachen</li> <li>mit formalen Rechenstrategien (unter anderem Äquivalenzumformung von Gleichungen und Prinzip der Substitution) Probleme auf algebraischer Ebene bearbeiten</li> <li>das <u>Aufdecken von Regelmäßigkeiten</u> oder mathematischen Mustern für die Problemlösung nutzen</li> <li>durch <u>Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten</u> Lösungsschritte finden</li> <li>Sonderfälle oder Verallgemeinerungen untersuchen</li> <li>das Problem <u>auf Bekanntes zurückführen</u> oder Analogien herstellen</li> <li>Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik zum Lösen nutzen</li> </ol>



Informative Figur

Tabelle, Graph

Systematisches Probieren  
Zerlegungs- und Ergänzungs-  
prinzip

Analogieschlüsse  
Vorwärts-/Rückwärtsarbeiten  
Auf Bekanntes zurückführen

## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining

Die Schülerinnen und Schüler können	
Probleme analysieren	
1.	das Problem mit eigenen Worten beschreiben
2.	Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten
3.	durch Verwendung von <u>Tabelle, Graph, Skizze</u> das Problem umformulieren
4.	Hilfsmittel und Informationstechnologie (z.B. Computerprogramme) einsetzen
Strategien anwenden	
5.	durch Untersuchung von Beispielen und diese auf PL übertragen
6.	das Problem durch Vereinfachung (z.B. Linien vereinfachen) lösen
7.	mit formalen Regeln (z.B. Prinzip der Substitution) arbeiten
8.	das Aufdecken von <u>Strukturen</u> (z.B. Symmetrie) nutzen
9.	durch <u>Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten</u> Lösungsschritte finden
10.	Sonderfälle oder Verallgemeinerungen untersuchen
11.	das Problem auf <u>Bekanntes zurückführen</u> oder Analogien herstellen
12.	Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik zum Lösen nutzen

Informative Figur

Tabelle, Graph

Wie erwerben die Lernenden Heuristiken und Strategien?

Verknüpfen  
Analogieschluss

Analogieschluss

Vorwärts-/Rückwärtsarbeiten

Auf Bekanntes zurückführen



## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining - Literaturrecherche

„Wenn es den in Mathematik geistig weniger beweglichen Lernenden gelingt, geeignete Problemlösestrategien (Heurismen) zu erlernen und flexibel anzuwenden, können von ihnen in begrenzten Themenbereichen ähnliche Problemlöseergebnisse erzielt werden wie von den intuitiven Problemlösern.“

(Bruder R.; Collet C., 2011, S. 36)



## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining - Literaturrecherche

## 4-Phasen-Konzept nach Regina Bruder:

(1. Gewöhnen an Heurismen und an strukturiertes Vorgehen, 2. Bewusstmachen von Heurismen (anhand von Musterbeispielen), 3. Bewusste Übung und Anwendung der Heurismen, 4. Kontexterweiterung der gelernten Strategien)

## Empirische Studie zum Einsatz von Strategieschlüsseln in der Sek I (R. Herold-Blasius und B. Rott, 2021):

(Strategieschlüssel initiieren den Einsatz von Heurismen, regen zu planvollem Vorgehen an;

→ Nachweisbar positive Beeinflussung des Problemlöseverhaltens der Lernenden)



## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining - Literaturrecherche

## LEMAMOP

Aufbau der Entwicklung von **L**erngelegenheiten für **M**athematisches **A**rgumentieren, **M**odellieren und **P**roblemlösen

- Schulversuch des Landes Niedersachsen (2013 – 2016)
- Wissenschaftliche Begleitung durch TU Darmstadt
- Entwicklung von Unterrichtsmaterialien zu den Kompetenzen *Mathematisches Argumentieren*, *Modellieren* und *Problemlösen* („Kompetenztrainings“) für Klasse 5 - 12

Orientiert  
an nieder-  
sächsischen  
Bildungs-  
standards





## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining „BaWü“

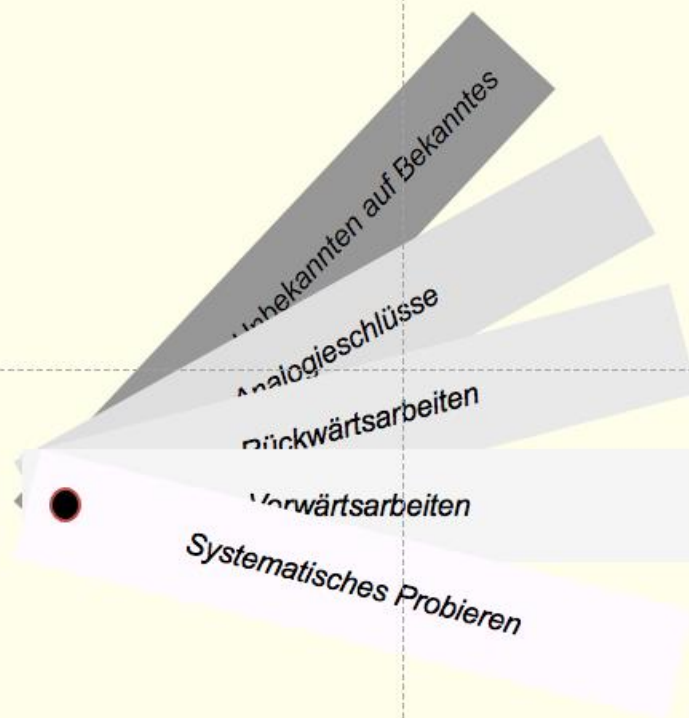
Klasse	Strategien/Heurismen	Mathematische Inhalte
5	Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten	Grundrechenarten
6	Informative Skizze	Brüche und Anteile; Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken
6	Zerlegen und Ergänzen	Flächen und Volumina
7	Systematisches Probieren und Tabellen	Grundrechenarten, Anteile
7	Invarianzprinzip	Terme und Gleichungen, Prozentrechnung, Dezimalzahlen
8	Extremalprinzip	Primfaktoren, lineare Funktionen, Zufallsexperimente
9	Wechsel von Darstellungen	Quadratische Funktionen und Gleichungen; Baumdiagramme und Vierfeldertafel, Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck
10	Rückführung auf Bekanntes	Bogenlänge, 2. Strahlensatz, Kreis, Körper



## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining „BaWü“

Klasse	Strategien/Heurismen	Mathematische Inhalte
5	Vorwärts-	
6	Informati	nfang und Flächen-
6	Zerlegen	
7	Systemat	teile
7	Invarianz	n, Prozentrechnung,
8	Extremal	Funktionen,
9	Wechsel	ien und Gleichungen; Vierfeldertafel, Sinus rinkligen Dreieck
10	Rückführung auf Bekanntes	Bogenlänge, 2. Strahlensatz, Kreis, Körper



1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining „BaWü“

**Einheitlicher Aufbau aller Trainings:** (Jeweils 1 Arbeitsblatt)

Aufgabe 1:        **Herausarbeiten und Bewusstmachen der Strategie**

Aufgabe 2:        **Erkennen und Beschreiben der Strategie**

Aufgabe 3:        **Trainieren der Strategie (versch. Niveaustufen)**



1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategietraining „BaWü“

**Zeitaufwand:** 2 – 3 (Einzel-)Schulstunden pro Training  
(je nach Intensität der Trainingsphase in Aufgabe 3)

**Materialien:**      Arbeitsblatt (für jede Strategie)  
                         Datei „Didaktische Hinweise“  
                         Datei „Lösungen“ (für jede Strategie)



## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategiefächer

### Idee:

- Nach jedem Strategietraining wird ein Streifen für die erarbeitete Strategie ausgefüllt.
- Die Streifen werden zu einem Fächer gebündelt.
- Diesen können die SuS bei Aufgaben heranziehen.



Bildquelle: KG Problemlösen

## 1. Eigenständige Problemlösestunden:

# Strategiefächer

## Materialien:

### Kopiervorlagen

1. bereits beschriftet
2. unbeschriftet

→ während des Strategietrainings wird von den SuS formuliert, was auf dem Streifen eingetragen werden soll.

- auf dickeres Papier kopieren (z.B. 160 g/m<sup>2</sup>)
- Streifen mit Musterbeutelklammer zusammenheften



Bildquelle: KG Problemlösen

# Literatur

- Bruder, Regina/ Collet, Christina (2011): Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. 1. Auflage. Berlin: Cornelsen.
- Holzäpfel, Lars/ Lacher, Martin/ Leuders, Timo/ Rott, Benjamin (2018): Problemlösen lehren lernen. Wege zum mathematischen Denken. 1. Auflage. Seelze: Kallmeyer/Klett.
- Herold-Blasius, Raja/ Rott, Benjamin: Strategieschlüssel in der Sekundarstufe I – ein Material zur Förderung des Strategieeinsatzes beim mathematischen Problemlösen. In: MU, 66 (2021), 1, S. 26 – 36.
- Bruder, Regina/ Linnemann, Torsten: Wege zum langfristigen Kompetenzaufbau. In: Mathematik lehren, (2016) 196, S. 2 – 9.
- Meyer, Daniel: Kompetenztrainings zum Problemlösen. In: Mathematik lehren, (2016) 196, S. 16 – 22.