

# GFS

## Allgemeine Bemerkungen

Die angeführten GFS-Themen können von begabten Schülerinnen und Schülern als Hausarbeit selbst erarbeitet werden. Je nach Klassenzusammensetzung können Teile der GFS exemplarisch von der Schülerin oder dem Schüler präsentiert werden oder die GFS kann nur schriftlich abgegeben werden. Im letzteren Fall empfiehlt es sich eine kurze (z.B. 10 minutige) mündliche Prüfung mit der Schülerin oder dem Schüler durchzuführen.

## Inhaltsverzeichnis

Wurzelziehen ohne Taschenrechner	2
Wachstumsprozesse	11
Vollständige Induktion	18
Weitere Themen aus dem Material	23
Kreative GFS-Themen	24

**GFS:****Wurzelziehen ohne Taschenrechner aus einer 6-stelligen Quadratzahl**

**Wie viele Ziffern kann die Wurzel aus einer 6-stelligen Quadratzahl maximal haben?**

Die kleinste vierstellige natürliche Zahl ist 1000. Da  $1000^2 = 1\,000\,000$  bereits eine 7-stellige Zahl ist, kann die Wurzel aus einer 6-stelligen Zahl maximal drei Ziffern haben.

Die Hunderterziffer bezeichnen wir mit  $a$ , die Zehnerziffer mit  $b$  und die Einerziffer mit  $c$ .

**Arbeitsaufträge:**

- (1) Im Beispiel wird ein Verfahren beschrieben, wie man  $\sqrt{700569}$  ohne Taschenrechner berechnen kann.

Wende das Verfahren an, um  $\sqrt{101124}$  zu bestimmen.

- (2) Im Beispiel wird ein Verfahren beschrieben, wie man  $\sqrt{700569}$  ohne Taschenrechner berechnen kann.

Begründe, warum das Verfahren die Wurzel liefert. Dafür stehen dir einige Hilfekarten zu Verfügung.

- (3) Im Beispiel wird ein Verfahren beschrieben, wie man  $\sqrt{700569}$  ohne Taschenrechner berechnen kann.

Wendet man das Verfahren an, um  $\sqrt{239121}$  zu bestimmen, so ergibt sich ein Problem. Beschreibe das Problem und finde dafür eine Erklärung.

Modifiziere anschließend das Verfahren so, dass das modifizierte Verfahren die Wurzel liefert.

Berechne  $\sqrt{151321}$  mit Hilfe des modifizierten Verfahrens.

## Beispiel zur Bestimmung von $\sqrt{700569}$

Ziel ist die Bestimmung von  $\sqrt{700569}$ .

Wie oben beschrieben bezeichnen wir die Hunderterziffer des Ergebnisses mit  $a$ , die Zehnerziffer mit  $b$  und die Einerziffer mit  $c$ .

Wir betrachten zunächst die Zahl aus den beiden linken Ziffern, hier also 70, und suchen die größte Quadratzahl die kleiner oder gleich dieser Zahl ist.

$  \begin{array}{r}  700569 \\  - 64 \phantom{00} \\  \hline  60 \phantom{00} \\  - 48 \phantom{00} \\  \hline  125 \phantom{00} \\  - \phantom{00} 9 \phantom{00} \\  \hline  1166 \phantom{00} \\  - 1162 \phantom{00} \\  \hline  49 \phantom{00} \\  - \phantom{00} 49 \\  \hline  0  \end{array}  $	<p>Größte Quadratzahl kleinergleich als 70 ist <math>64 = 8^2</math>. Daher ist <math>a = 8</math>.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 0). Dividiere die erhaltene Zahl durch <math>2a</math>: <math>60 : (2 \cdot 8) = 3 + \text{Rest} \rightarrow b = 3</math>.</p> <p>Subtrahiere <math>2ab = 2 \cdot 8 \cdot 3 = 48</math></p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 5). Subtrahiere <math>b^2 = 9</math>.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 6). Bilde die Zahl aus den bisher bekannten Ziffern <math>a</math> und <math>b</math> (hier 83). Dividiere die erhaltene Zahl durch das Doppelte dieser Zahl: <math>1166 : (2 \cdot 83) = 7 + \text{Rest} \rightarrow c = 7</math>. Bilde das Produkt <math>2 \cdot (\text{Zahl mit den bekannten Ziffern } a \text{ und } b) \cdot c</math> <math>= 2 \cdot 83 \cdot 7 = 1162</math>.</p> <p>Subtrahiere das Ergebnis dieses Produktes.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 9). Subtrahiere <math>c^2 = 49</math>.</p>
--	---

Wir erhalten daher  $\sqrt{700569} = 837$  ( $a = 8$ ,  $b = 3$ ,  $c = 7$ ).

## Hilfekarten zu Arbeitsauftrag (2):

<h2>Hilfe 1</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	<p>Die gesuchte Wurzel lässt sich in der Form</p> $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ <p>schreiben. Verwende die Definition der Quadratwurzel.</p>
<h2>Hilfe 2</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	$700569 = (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2$ <p>Verwende mehrfach die erste binomische Formel.</p>
<h2>Hilfe 3</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	<p>Zeige:</p> $(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 = (a^2 \cdot 10\,000 + 2ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100) + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2$ <p>Mit welchem Summanden wird <math>b</math> bestimmt?</p>
<h2>Hilfe 4</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	<p>Im ersten Schritt werden <math>a^2</math> Zehntausender subtrahiert. Holt man die erste Ziffer nach unten, so erhält man die verbleibenden Tausender (hier 60).</p>
<h2>Hilfe 5</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	<p>Das Verfahren nimmt an, dass die verbleibenden (hier 60) Tausender überwiegend vom Term <math>2ab \cdot 1000</math> erzeugt werden und bestimmt daraus den Wert für <math>b</math>. Welche Terme werden im Verfahren als nächstes subtrahiert? Mit welchem Term wird <math>c</math> bestimmt?</p>

## Lösung zu Arbeitsauftrag (1):

### Anwendung des Verfahrens, um $\sqrt{101124}$ zu bestimmen

$  \begin{array}{r}  101124 \\  - \quad 9 \phantom{00} \\  \hline  11 \phantom{00}  \end{array}  $	<p>Größte Quadratzahl kleinergleich als 10 ist 9. Daher ist <math>a = 3</math>.</p>
$  \begin{array}{r}  11 \\  - \quad 6 \phantom{0} \\  \hline  51  \end{array}  $	<p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1). Dividiere die erhaltene Zahl durch <math>2a</math>: <math>11 : (2 \cdot 3) = 1 + \text{Rest} \rightarrow b = 1</math>. Subtrahiere <math>2ab = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6</math></p>
$  \begin{array}{r}  51 \\  - \quad 1 \phantom{0} \\  \hline  502  \end{array}  $	<p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1). Subtrahiere <math>b^2 = 1</math>.</p>
$  \begin{array}{r}  502 \\  - \quad 496 \phantom{0} \\  \hline  64  \end{array}  $	<p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 2). Bilde die Zahl aus den bisher bekannten Ziffern <math>a</math> und <math>b</math> (hier 31). Dividiere die erhaltene Zahl durch das Doppelte dieser Zahl: <math>502 : (2 \cdot 31) = 8 + \text{Rest} \rightarrow c = 8</math>. Bilde das Produkt <math>2 \cdot (\text{Zahl mit den bekannten Ziffern } a \text{ und } b) \cdot c</math> <math>= 2 \cdot 31 \cdot 8 = 496</math>.</p>
$  \begin{array}{r}  64 \\  - \quad 64 \\  \hline  0  \end{array}  $	<p>Subtrahiere das Ergebnis dieses Produktes. Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 4). Subtrahiere <math>c^2 = 64</math>.</p>

Wir erhalten  $\sqrt{101124} = 318$  ( $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 8$ ).

## Lösung zu Arbeitsauftrag (2):

### Begründung des Verfahrens:

Bezeichnen wir die Hunderterziffer des Ergebnisses mit  $a$ , die Zehnerziffer mit  $b$  und die Einerziffer mit  $c$ , so erhält man mit Hilfe der ersten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} 700569 &= (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 = (a \cdot 100 + b \cdot 10)^2 + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 \\ &= (a^2 \cdot 10\,000 + 2ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100) + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Die zunächst betrachtete Zahl 70 sind die Zehntausender, die überwiegend vom Term  $a^2 \cdot 10\,000$  erzeugt werden. Im Beispiel sind es  $8^2 = 64$  Zehntausender, die im ersten Schritt subtrahiert werden.

Holt man die erste Ziffer nach unten, so erhält man die verbleibenden 60 Tausender. Das Verfahren nimmt nun an, dass diese überwiegend vom Term  $2ab \cdot 1000$  erzeugt werden und bestimmt daraus den Wert für  $b$ .<sup>1</sup> Anschließend werden  $2ab$  Tausender, also der Term  $2ab \cdot 1000$  subtrahiert.

Holt man die nächste Ziffer nach unten, so erhält man die verbleibenden 125 Hunderter. Es werden noch  $b^2$  Hunderter, also der Term  $b^2 \cdot 100$  subtrahiert.

Holt man die nächste Ziffer nach unten, so erhält man die verbleibenden 1166 Zehner. Der nächste, noch nicht subtrahierte, Term in  $(*)$  ist

$$2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c = (a \cdot 10 + b \cdot 1) \cdot c \cdot 10$$

Dieser beschreibt also  $(a \cdot 10 + b \cdot 1) \cdot c$  Zehner.  $(a \cdot 10 + b \cdot 1)$  ist dabei die Zahl, die man aus den bisher bekannten Ziffern  $a$  und  $b$  bildet.  $c$  wird jetzt so groß, wie möglich bestimmt und nach Subtraktion bleiben nur noch  $c^2$  Einer übrig.

<sup>1</sup>Hierbei kann es zu Problemen kommen, wenn  $b^2$  zu groß ist. Vergleiche Arbeitsauftrag (3).

### Lösung zu Arbeitsauftrag (3):

#### Modifizierung des Verfahrens am Beispiel $\sqrt{239121}$

$$\begin{array}{r}
 239121 \\
 - 16 \\
 \hline
 79 \\
 - 72 \\
 \hline
 71 \\
 - 81 \\
 \hline
 -10
 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleiner als 23 ist 16.  
Daher ist  $a = 4$ .

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 9).  
Dividiere die erhaltene Zahl durch  $2a$ :

$$79 : (2 \cdot 4) = 9 + \text{Rest} \rightarrow b = 9.$$

Subtrahiere  $2ab = 2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Subtrahiere  $b^2 = 81$ .

**Es ergibt sich ein negatives Ergebnis.**

$b$  ist daher zu groß. Korrigiere  $\rightarrow b = 8$

Wiederhole die letzten beiden Subtraktionen  
mit dem korrigierten  $b$ .

$$\begin{array}{r}
 239121 \\
 - 16 \\
 \hline
 79 \\
 - 64 \\
 \hline
 151 \\
 - 64 \\
 \hline
 872 \\
 - 864 \\
 \hline
 81 \\
 - 81 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleiner als 23 ist 16.  
Daher ist  $a = 4$ .

**Korrigiertes  $b = 8$ .**

Subtrahiere  $2ab = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Subtrahiere  $b^2 = 64$ .

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 2).  
Bilde die Zahl aus den bisher bekannten Ziffern  
 $a$  und  $b$  (hier 48).

Dividiere die erhaltene Zahl durch das Doppelte  
dieser Zahl:  $872 : (2 \cdot 48) = 9 + \text{Rest} \rightarrow c = 9$ .

Bilde das Produkt

$$\begin{aligned}
 &2 \cdot (\text{Zahl mit den bekannten Ziffern } a \text{ und } b) \cdot c \\
 &= 2 \cdot 48 \cdot 9 = 864.
 \end{aligned}$$

Subtrahiere das Ergebnis dieses Produktes.

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Subtrahiere  $c^2 = 81$ .

Wir erhalten daher  $\sqrt{239121} = 489$  ( $a = 4$ ,  $b = 8$ ,  $c = 9$ ).

**Bemerkung:**

Bezeichnet man die Hunderterziffer des Ergebnisses mit  $a$ , die Zehnerziffer mit  $b$  und die Einerziffer mit  $c$ , so erhält man mit Hilfe der ersten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} 239121 &= (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 = (a \cdot 100 + b \cdot 10)^2 + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 \\ &= (a^2 \cdot 10\,000 + 2ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100) + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Um  $b$  zu bestimmen, wird nur der Term  $2ab \cdot 1000$  betrachtet. Das sich ergebende  $b$  ist zu groß, da in diesem Fall der Term  $b^2 \cdot 100$  einen nicht unerheblichen Anteil liefert.

Konkret ergibt sich nach der ersten Subtraktion:

$$239121 - a^2 \cdot 10\,000 = 239121 - 16 \cdot 10\,000 = 79\,121$$

Für  $b = 9$  ergeben die Terme  $2ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100 = 72\,000 + 8100 = 80,1 \cdot 1000$ .

Der erste Summand ist noch kleiner als 79 121, aber da  $b^2$  zu groß ist, ist die Summe insgesamt größer als 79 121. Da das Verfahren zunächst  $b^2 \cdot 100$  vernachlässigt, liefert es in diesem Fall einen zu großen Wert von  $b$ .



## Anwendung des Verfahrens, um $\sqrt{151321}$ zu bestimmen

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 1\ 3\ 2\ 1 \\ -\quad 9\phantom{00} \\ \hline 6\ 1 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleinergleich als 15 ist 9.  
Daher ist  $a = 3$ .

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Dividiere die erhaltene Zahl durch  $2a$ :

$$61 : (2 \cdot 3) = 10 + \text{Rest}$$

**10 als Ziffer ist nicht möglich.**

$b$  ist daher zu groß. Korrigiere  $\rightarrow b = 9$

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 1\ 3\ 2\ 1 \\ -\quad 9\phantom{00} \\ \hline 6\ 1 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleinergleich als 15 ist 9.  
Daher ist  $a = 3$ .

**Korrigiertes  $b = 9$ .**

$$\begin{array}{r} -\ 5\ 4 \\ \hline 7\ 3 \end{array}$$

Subtrahiere  $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$

$$\begin{array}{r} -\ 8\ 1 \\ \hline -8 \end{array}$$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 3).  
Subtrahiere  $b^2 = 81$ .

**Es ergibt sich ein negatives Ergebnis.**

$b$  ist immer noch zu groß. Korrigiere  $\rightarrow b = 8$

Wiederhole die letzten beiden Subtraktionen  
mit dem korrigierten  $b$ .

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 1\ 3\ 2\ 1 \\ -\quad 9\phantom{00} \\ \hline 6\ 1 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleinergleich als 15 ist 9.  
Daher ist  $a = 3$ .

**Korrigiertes  $b = 8$ .**

$$\begin{array}{r} -\ 4\ 8 \\ \hline 1\ 3\ 3 \end{array}$$

Subtrahiere  $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$

$$\begin{array}{r} -\ 6\ 4 \\ \hline 6\ 9\ 2 \end{array}$$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 3).  
Subtrahiere  $b^2 = 64$ .

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 2).  
Bilde die Zahl aus den bisher bekannten Ziffern  
 $a$  und  $b$  (hier 38).

Dividiere die erhaltene Zahl durch das Doppelte  
dieser Zahl:  $692 : (2 \cdot 38) = 9 + \text{Rest} \rightarrow c = 9$ .

Bilde das Produkt

$$\begin{aligned} &2 \cdot (\text{Zahl mit den bekannten Ziffern } a \text{ und } b) \cdot c \\ &= 2 \cdot 38 \cdot 9 = 684. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -\ 6\ 8\ 4 \\ \hline 8\ 1 \end{array}$$

Subtrahiere das Ergebnis dieses Produktes.

$$\begin{array}{r} -\ 8\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Subtrahiere  $c^2 = 81$ .

Wir erhalten daher  $\sqrt{151321} = 389$  ( $a = 3$ ,  $b = 8$ ,  $c = 9$ ).

## Didaktischer Kommentar

Klasse	Bezug zum Bildungsplan					Art der Aufgabe		
	ZVO	Messen	FZ	RuF	Daten	selbstdifferenzierend	herausfordernd	Enrichment
8	×						×	×

Die Arbeitsaufträge vertiefen zum einen den Wurzelbegriff und zum anderen den Umgang mit der ersten binomischen Formel. Beide inhaltlichen Kompetenzen müssen den Schülerinnen und Schülern im Vorfeld zur Verfügung stehen.

Beim einfachen Arbeitsauftrag (1) soll ein vorgestelltes Verfahren auf ein neues Beispiel angewendet werden. Die Begründungen in Arbeitsauftrag (2) sind deutlich herausfordernder und können daher durch Hilfekarten unterstützt werden.

Arbeitsauftrag (3) fordert zunächst eine Analysekompetenz der auftretenden Problematik und anschließend eine kreative Modifikation des Verfahrens. Im letzten Beispiel tritt dann noch ein zusätzliches Problem auf, das gelöst werden muss.

# GFS: Wachstumsprozesse

## Hausarbeit mit mündlicher Prüfung

**Aufgabe 1.** Versuche, das Beispiel zum beschränkten Wachstum zu verstehen und ergänze die Wertetabelle und den Graphen.

### Beispiel zum beschränkten Wachstum

Ein Glas Eistee mit der Temperatur  $5^{\circ}\text{C}$  steht im Sommer auf der Terrasse. Dort herrscht eine Temperatur von  $30^{\circ}\text{C}$ . Nach 10 Minuten ist die Temperatur des Eistees auf  $10^{\circ}\text{C}$  gestiegen. Da die Temperatur des Eistees nicht mehr als  $30^{\circ}\text{C}$  erreichen kann, spricht man von beschränktem Wachstum.

### Bezeichnung der Variablen:

Wir betrachten die Temperatur alle 10 Minuten, d.h. wir legen fest, dass ein Zeitschritt 10 Minuten entspricht. Mit  $T(n)$  bezeichnen wir die Temperatur des Eistees in  $^{\circ}\text{C}$  nach  $n$  Zeitschritten, d.h. beispielsweise wäre  $T(4)$  die Temperatur des Eistees nach 4 Zeitschritten, also nach 40 Minuten.

Aus der Physik weiß man, dass die Temperaturänderung in einem Zeitschritt proportional zur Differenz der Eistee-Temperatur und Außentemperatur ist, d.h.

$$B(n+1) - B(n) = k \cdot (30 - B(n))$$

### Bestimmung der Proportionalitätskonstanten $k$ :

$$\begin{aligned} B(1) - B(0) &= k \cdot (30 - B(0)) \\ 10 - 5 &= k \cdot (30 - 5) \\ 5 &= 25k \\ k &= 0,2 \end{aligned}$$

### Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} B(n+1) - B(n) &= 0,2 \cdot (30 - B(n)) \\ B(n+1) &= B(n) + 0,2 \cdot 30 - 0,2B(n) \\ B(n+1) &= 0,8B(n) + 6 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Startwertes  $B(0) = 5$  lassen sich jetzt nacheinander, die Werte von  $B(n)$  für alle  $n$  ausrechnen.

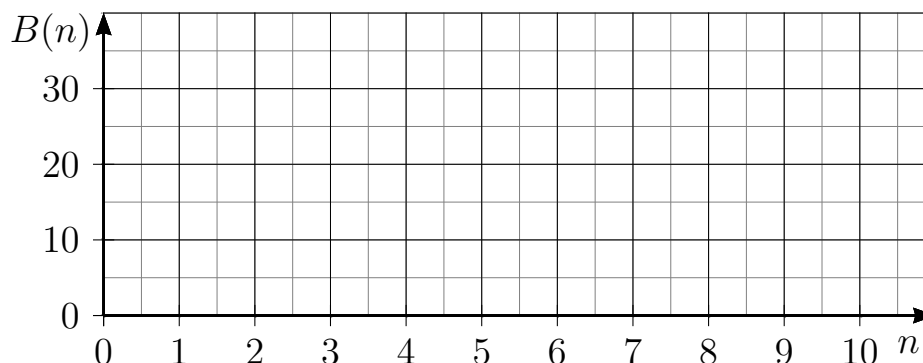
### Wertetabelle:

Fülle die Wertetabelle aus. Runde die Werte von  $B(n)$  jeweils auf eine Dezimale.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B(n)$											

### Graph:

Übertrage die Werte aus der Wertetabelle in das Koordinatensystem.



### Herleitung einer expliziten Formel für $B(n)$

#### Aufgabe 2.

a) Zeige, dass

$$B(3) = 0,8^3 \cdot B(0) + 6 \cdot (0,8^2 + 0,8 + 1)$$

b) Für  $0 \leq q < 1$  und  $n \geq 0$  gilt die folgende Formel (geometrische Summe)

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Zeige damit

$$B(3) = 30 - 0,8^3(30 - B(0))$$

c) Verallgemeinere diese Formel für  $B(n)$ .

### Ein weiteres Beispiel

**Aufgabe 3.** Einem Patienten wird durch eine Infusion ein Medikament verabreicht, das vor der Infusion nicht im Blut vorhanden ist. Dabei gelangen pro Minute  $2mg$  ins Blut. Gleichzeitig werden pro Minute 4% der aktuell vorhandenen Menge des Medikaments vom Körper abgebaut und ausgeschieden.

- Bestimme eine Rekursionsgleichung für die im Blut vorhandene Menge  $m(t)$  des Medikaments nach  $t$  Minuten sowie eine explizite Darstellung.
- Die Infusion führt auf sehr lange Sicht zu einer konstanten Menge des Medikaments im Blut. Gib diesen maximalen Wert an.

## Ein Beispiel für logistisches Wachstum

In einer Ganztagschule mit 1000 Schülerinnen und Schülern wird vor der ersten Stunde von vier Schülerinnen und Schülern ein Gerücht erfunden, das sich von nun an verbreitet. Nach einer Stunde kennen bereits 7 Schülerinnen und Schüler das Gerücht.

Wir betrachten Zeitschritte von einer Stunde.

Im Modell des logistischen Wachstums ist die Änderung der Anzahl der Personen, die das Gerücht in einem Zeitschritt neu erfahren zum einen proportional zur Anzahl der Schülerinnen und Schülern, die das Gerücht kennen und zum anderen proportional zur der Schülerinnen und Schüler, die das Gerücht noch nicht kennen.

### Aufgabe 4.

- Begründe die Sinnhaftigkeit der beiden Proportionalitäten im Sachzusammenhang.
- Stelle eine Rekursionsformel auf und bestimme, wie viele Schülerinnen und Schüler das Gerücht nach einem Schultag von 10 Stunden kennen.
- Bestimme mit Hilfe einer Wertetabelle nach wie vielen Stunden mehr als 950 Schülerinnen und Schüler das Gerücht kennen.
- Stelle die Werte in einem Graphen dar.

## Lösungen

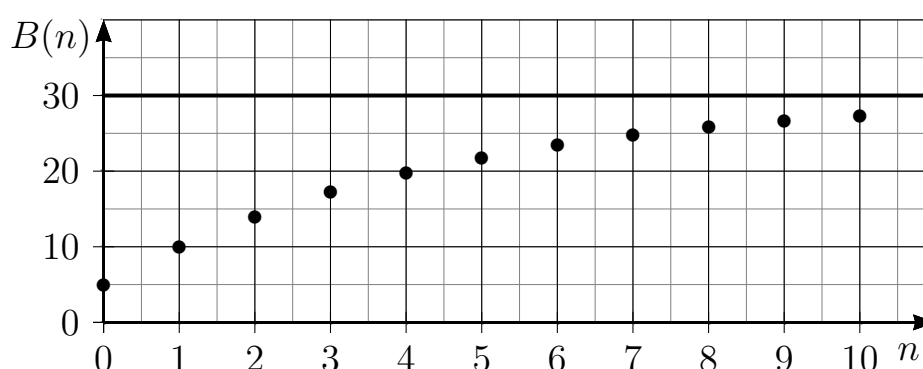
### Aufgabe 1.

#### Wertetabelle:

Die Werte von  $B(n)$  sind jeweils auf eine Dezimale gerundet.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B(n)$	5	10	14	17,2	19,8	21,8	23,4	24,8	25,8	26,6	27,4

#### Graph:



### Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}
 B(3) &= 0,8B(2) + 6 = 0,8(0,8B(1) + 6) + 6 = 0,8^2B(1) + 0,8 \cdot 6 + 6 = 0,8^2B(1) + 6 \cdot (1 + 0,8) \\
 &= 0,8^2(0,8B(0) + 6) + 6 \cdot (1 + 0,8) \\
 &= 0,8^3B(0) + 0,8^2 \cdot 6 + 6 \cdot (1 + 0,8) \\
 &= 0,8^3B(0) + 6 \cdot (1 + 0,8 + 0,8^2)
 \end{aligned}$$

Verwendet man jetzt die Formel für die geometrische Summe für  $q = 0,8$  und  $n = 2$ , so erhält man

$$\begin{aligned}
 B(3) &= 0,8^3B(0) + 6 \cdot \frac{1 - 0,8^{2+1}}{1 - 0,8} = 0,8^3B(0) + 30 \cdot (1 - 0,8^3) \\
 &= 0,8^3B(0) + 30 - 0,8^3 \cdot 30 = 30 - 0,8^3(30 - B(0))
 \end{aligned}$$

Allgemein ergibt sich

$$B(n) = 30 - 0,8^n(30 - B(0))$$

### Aufgabe 3.

- a) Aus  $m(t+1) = m(t) + 2 - 0,04 \cdot m(t) = 0,96m(t) + 2$  folgt wie oben

$$\begin{aligned} m(t) &= 0,96^t m(0) + 2 \cdot (1 + 0,96 + 0,96^2 + \dots + 0,96^{t-1}) \\ &= 0,96^t m(0) + 2 \cdot \frac{1 - 0,96^{t+1}}{1 - 0,96} \\ &= 0,96^t m(0) + 50 \cdot (1 - 0,96^{t+1}) \end{aligned}$$

Mit  $m(0) = 0$  ergibt sich somit

$$m(t) = 50 \cdot (1 - 0,96^{t+1})$$

- b) Auf lange Sicht befinden sich  $50mg$  des Medikaments im Blut.

### Aufgabe 4.

- a) Je mehr Personen, das Gerücht kennen, desto wahrscheinlicher ist es, dass eine Person das Gerücht weitergibt. Andererseits kann sich das Gerücht nur dadurch verbreiten, dass es an jemanden weitergegeben wird, der es noch nicht gehört hat. Die Anzahl dieser Personen beträgt  $1000 - A(t)$ , sie nimmt mit der Zeit ab.
- b) Die beiden Proportionalitäten können durch die Proportionalität zum Produkt ersetzt werden. Es gilt daher:

$$A(n+1) - A(n) = k \cdot A(n) \cdot (1000 - A(n))$$

Bestimmung von  $k$ :

$$\begin{aligned} A(0) &= 4 \\ A(1) &= A(0) + k \cdot A(0) \cdot (1000 - A(0)) \\ 7 &= 4 + k \cdot 4 \cdot (1000 - 4) \\ 3 &= k \cdot 3984 \\ k &= \frac{1}{1328} \end{aligned}$$

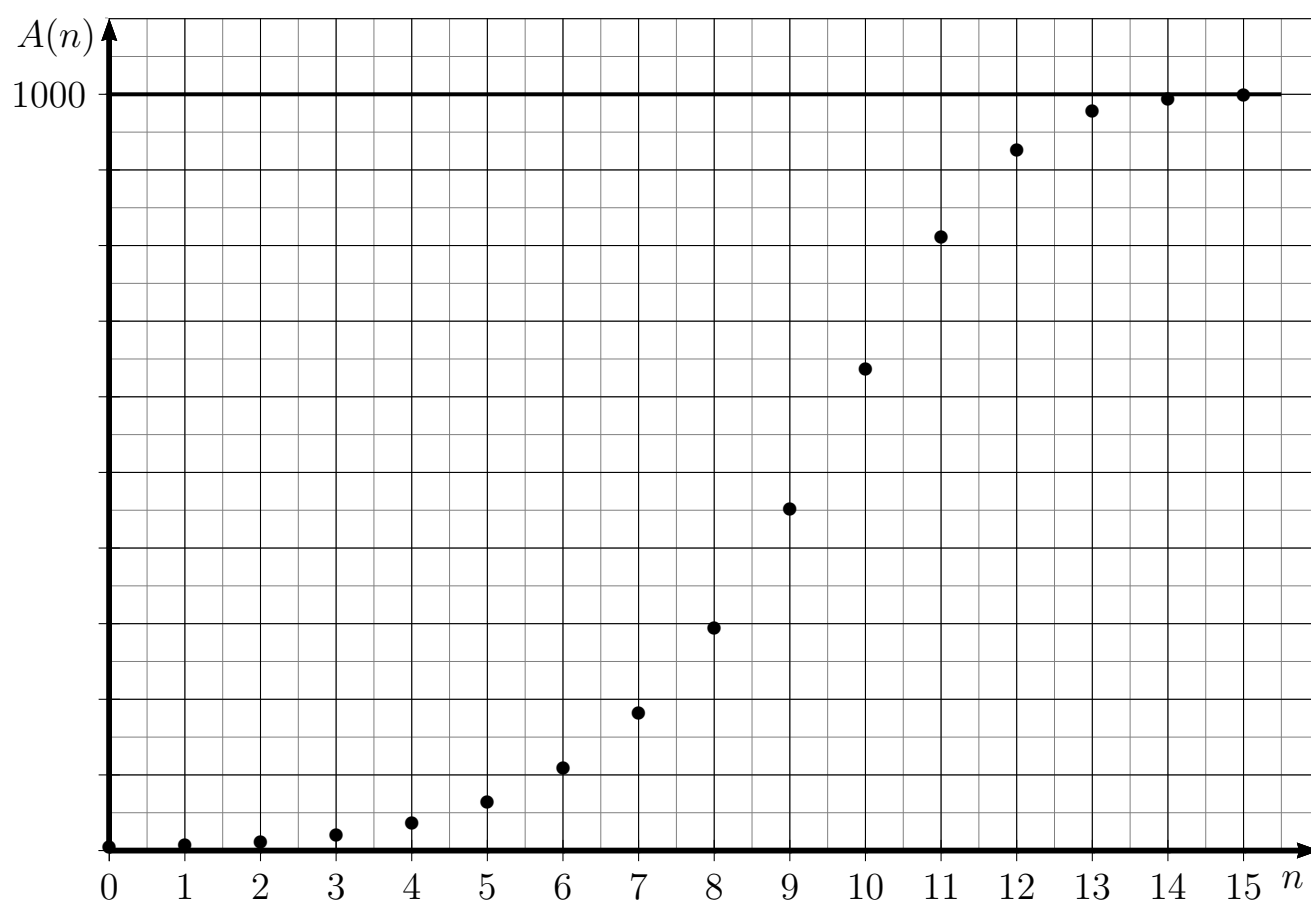
### Wertetabelle:

Die Werte von  $A(n)$  sind jeweils auf ganze Zahlen gerundet.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$A(n)$	4	7	12	21	37	64	109	182	294	451	637	811	927	978	994	999

- c) Nach 13 Stunden kennen mehr als 950 Schülerinnen und Schüler das Gerücht.

d)





## Didaktischer Kommentar

Klasse	Bezug zum Bildungsplan					Art der Aufgabe		
	ZVO	Messen	FZ	RuF	Daten	selbstdifferenzierend	herausfordernd	Enrichment
9	×		×					×

Die Arbeitsaufträge vertiefen zum einen den Umgang mit Potenztermen und bieten einen Einstieg in Folgen zur Beschreibung von Wachstumsprozessen.

## GFS: Vollständige Induktion

### Aufgabe 1.

Informiere dich über das Beweisverfahren der vollständigen Induktion und beweise damit die folgende Aussagen.

- a) Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

- b) Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- c) Geometrische Summe

Für eine reelle Zahl  $q \neq 1$  gilt:

$$1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Aufgabe 2.** Sowohl Induktionsanfang als auch Induktionsschluss sind notwendig.

- a) Gib ein Beispiel an für eine Aussage, bei der der Induktionsanfang möglich, der Induktionsschluss aber nicht richtig ist. (Folglich muss die Aussage dann falsch sein.)
- b) Gib ein Beispiel an für eine Aussage, bei der Induktionsschluss richtig ist, aber kein Induktionsanfang möglich ist.

## Lösungen:

### Aufgabe 1.

- a) Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen

#### Induktionsanfang

$1 = 1^2$  ist erfüllt.

#### Induktionsschluss:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) + (2(n + 1) - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) + (2(n + 1) - 1) &= n^2 + (2n + 1) \\ &= (n + 1)^2 \quad (\text{erste binomische Formel}) \end{aligned}$$

- b) Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen

#### Induktionsanfang

$$1^2 = 1 \text{ und } \frac{1 \cdot (1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$$

Daher ist der Induktionsanfang erfüllt.

#### Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \text{Induktionsvoraussetzung:} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \\ \text{zu zeigen:} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 &= \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)}{6} \\ &= \frac{(n + 1)((n + 2)(2n + 3))}{6} = \frac{(n + 1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n + 1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1) + 6(n + 1)^2}{6} \\ &= \frac{(n + 1) \cdot (n(2n + 1) + 6(n + 1))}{6} \\ &= \frac{(n + 1) \cdot (2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n + 1) \cdot (2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

c) Geometrische Summe

**Induktionsanfang:**

Für  $n = 1$  gilt mit der dritten binomischen Formel:

$$\frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = 1 + q$$

**Induktionsschluss:**

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

## Aufgabe 2.

a) Beispielsweise:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

Der Induktionsanfang ist für  $n = 1$  erfüllt, der Induktionsschluss ist aber nicht möglich:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n^2 - n + 2}{2} + (n + 1) = \frac{n^2 - n + 2 + 2(n + 1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 4}{2} \end{aligned}$$

Aber

$$\frac{(n + 1)^2 - (n + 1) + 2}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 2}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} \neq \frac{n^2 + n + 4}{2}$$

b) Beispielsweise.

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Der Induktionsschluss ist möglich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} &= 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Ein Induktionsanfang ist aber nicht möglich (weder für  $n = 1$ , noch  $n = 2, \dots$ ).

### Bemerkung:

Mit Hilfe einer geometrischen Summe erhält man die zugehörige richtige Aussage:

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Es gilt somit

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

da in der Beispiel-Aussage der Summand  $\frac{1}{2^0}$  fehlt.

## Didaktischer Kommentar

Klasse	Bezug zum Bildungsplan					Art der Aufgabe		
	ZVO	Messen	FZ	RuF	Daten	Selbstdifferenzierend	Herausfordernd	Enrichment
9	×							×

In der GFS wird das Verfahren der vollständigen Induktion erlernt, welches eine Relevanz für ein mathematisches Studium beinhaltet. Ferner wird das Rechnen mit Potenztermen in einem erweiterten Zusammenhang geübt.

## Weitere Themen aus dem Material

Einige der Aufgaben im Material eignen sich auch für eine Bearbeitung im Rahmen einer GFS.

- Primzahlaufgaben (ab Klasse 5) [Moodle Link](#)
- Mittellinien in Vierecken (Version Klasse 5) [Moodle Link](#)
- Volumen - würfelig (Version für Klasse 5) [Moodle Link](#)
- Bruchrechnung ägyptisch (ab Klasse 6) [Moodle Link](#)
- Volumen - würfelig (Version für Klasse 7) [Moodle Link](#)
- Dreieck mit Berührungskreis (ab Klasse 7) [Moodle Link](#)
- Wundersame Wurzeln (Klasse 8) [Moodle Link](#)
- Pythagoräische Tripel (ab Klasse 8) [Moodle Link](#)
- Zahlentheoretische Beweise (ab Klasse 8) [Moodle Link](#)
- Spezielle Winkel für Sinus und Kosinus (Klasse 9) [Moodle Link](#)
- Kosinussatz und Sinussatz (Klasse 9) [Moodle Link](#)
- Mittellinien in Vierecken (Version Klasse 9) [Moodle Link](#)
- Aufgabe zum Fünfeck (ab Klasse 9) [Moodle Link](#)
- Binomialverteilung - Herleitung Erwartungswert und Varianz (Klasse 10) [Moodle Link](#)

## Kreative GFS-Themen

- **Werbespot: Baumdiagramme**

Du sollst das Image der Baumdiagramme in der Stochastik verbessern und ihre Wichtigkeit und Nützlichkeit herausstellen. Entwerfe und drehe dazu einen passenden Werbespot. Bewertet werden Kreativität, Ausführung und mathematische Richtigkeit.

- **Rap-Battle**

Schreibe einen Rap-Battle (auf Deutsch), bei dem sich ein Mathematiker und ein Nicht-mathematiker über den Sinn der Differenzialrechnung streiten.

Erstelle dazu ein Soundfile oder ein Video.

Bewertet werden Kreativität, Ausführung sowie mathematischer Inhalt und mathematische Richtigkeit.

Schülerinnen und Schüler, die ein solches GFS-Thema wählen, sind meist sehr motiviert und investieren viel Zeit in die GFS. Beim Vorstellen der GFS soll die Schülerin oder der Schüler die wichtigsten Überlegungen und mathematischen Ideen des Werks erläutern. Daran können sich Fragen der Lehrkraft anschließen.

Die oberen Ideen können inhaltlich auch an andere mathematische Themen und Klassenstufen angepasst werden.