

## Wurzelziehen ohne Taschenrechner aus einer 6-stelligen Quadratzahl

Wie viele Ziffern kann die Wurzel aus einer 6-stelligen Quadratzahl maximal haben?

Die kleinste vierstellige natürliche Zahl ist 1000. Da  $1000^2 = 1\,000\,000$  bereits eine 7-stellige Zahl ist, kann die Wurzel aus einer 6-stelligen Zahl maximal drei Ziffern haben.

Die Hunderterziffer bezeichnen wir mit  $a$ , die Zehnerziffer mit  $b$  und die Einerziffer mit  $c$ .

### Arbeitsaufträge:

Wähle mindestens einen der folgenden Arbeitsaufträge. Den Schwierigkeitsgrad erkennst du an der Anzahl der Sterne.

(1) ★

Im Beispiel wird ein Verfahren beschrieben, wie man  $\sqrt{700569}$  ohne Taschenrechner berechnen kann.

Wende das Verfahren an, um  $\sqrt{101124}$  zu bestimmen.

(2) ★★★

Im Beispiel wird ein Verfahren beschrieben, wie man  $\sqrt{700569}$  ohne Taschenrechner berechnen kann.

Begründe, warum das Verfahren die Wurzel liefert. Dafür stehen dir einige Hilfekarten zu Verfügung.

(3) ★★★

Im Beispiel wird ein Verfahren beschrieben, wie man  $\sqrt{700569}$  ohne Taschenrechner berechnen kann.

Wendet man das Verfahren an, um  $\sqrt{239121}$  zu bestimmen, so ergibt sich ein Problem. Beschreibe das Problem und finde dafür eine Erklärung.

Modifiziere anschließend das Verfahren so, dass das modifizierte Verfahren die Wurzel liefert.

Berechne  $\sqrt{151321}$  mit Hilfe des modifizierten Verfahrens.

## Beispiel zur Bestimmung von $\sqrt{700569}$

Ziel ist die Bestimmung von  $\sqrt{700569}$ .

Wie oben beschrieben bezeichnen wir die Hunderterziffer des Ergebnisses mit  $a$ , die Zehnerziffer mit  $b$  und die Einerziffer mit  $c$ .

Wir betrachten zunächst die Zahl aus den beiden linken Ziffern, hier also 70, und suchen die größte Quadratzahl die kleiner oder gleich dieser Zahl ist.

$  \begin{array}{r}  700569 \\  - 64 \phantom{00} \\  \hline  60 \phantom{00} \\  - 48 \phantom{00} \\  \hline  125 \phantom{00} \\  - \phantom{00} 9 \phantom{00} \\  \hline  1166 \phantom{00} \\  - 1162 \phantom{00} \\  \hline  49 \phantom{00} \\  - \phantom{00} 49 \phantom{00} \\  \hline  0  \end{array}  $	<p>Größte Quadratzahl kleinergleich als 70 ist <math>64 = 8^2</math>. Daher ist <math>\mathbf{a} = 8</math>.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 0). Dividiere die erhaltene Zahl durch <math>2a</math>: <math>60 : (2 \cdot 8) = 3 + \text{Rest} \rightarrow \mathbf{b} = 3</math>.</p> <p>Subtrahiere <math>2ab = 2 \cdot 8 \cdot 3 = 48</math></p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 5). Subtrahiere <math>b^2 = 9</math>.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 6). Bilde die Zahl aus den bisher bekannten Ziffern <math>a</math> und <math>b</math> (hier 83). Dividiere die erhaltene Zahl durch das Doppelte dieser Zahl: <math>1166 : (2 \cdot 83) = 7 + \text{Rest} \rightarrow \mathbf{c} = 7</math>.</p> <p>Bilde das Produkt <math>2 \cdot (\text{Zahl mit den bekannten Ziffern } a \text{ und } b) \cdot c</math> <math>= 2 \cdot 83 \cdot 7 = 1162</math>.</p> <p>Subtrahiere das Ergebnis dieses Produktes.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 9). Subtrahiere <math>c^2 = 49</math>.</p>
---	---

Wir erhalten daher  $\sqrt{700569} = 837$  ( $a = 8$ ,  $b = 3$ ,  $c = 7$ ).

## Hilfekarten zu Arbeitsauftrag (2):

<h2>Hilfe 1</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	<p>Die gesuchte Wurzel lässt sich in der Form</p> $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ <p>schreiben. Verwende die Definition der Quadratwurzel.</p>
<h2>Hilfe 2</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	$700569 = (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2$ <p>Verwende mehrfach die erste binomische Formel.</p>
<h2>Hilfe 3</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	<p>Zeige:</p> $(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 = (a^2 \cdot 10\,000 + 2ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100) + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2$ <p>Mit welchem Summanden wird <math>b</math> bestimmt?</p>
<h2>Hilfe 4</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	<p>Im ersten Schritt werden <math>a^2</math> Zehntausender subtrahiert. Holt man die erste Ziffer nach unten, so erhält man die verbleibenden Tausender (hier 60).</p>
<h2>Hilfe 5</h2> <p>Begründung des Verfahrens</p>	<p>Das Verfahren nimmt an, dass die verbleibenden (hier 60) Tausender überwiegend vom Term <math>2ab \cdot 1000</math> erzeugt werden und bestimmt daraus den Wert für <math>b</math>. Welche Terme werden im Verfahren als nächstes subtrahiert? Mit welchem Term wird <math>c</math> bestimmt?</p>

## Lösung zu Arbeitsauftrag (1):

### Anwendung des Verfahrens, um $\sqrt{101124}$ zu bestimmen

$  \begin{array}{r}  101124 \\  - \quad 9 \phantom{00} \\  \hline  11 \phantom{00} \\  - \quad 6 \phantom{00} \\  \hline  51 \phantom{00} \\  - \quad 1 \phantom{00} \\  \hline  502 \phantom{00} \\  - 496 \phantom{00} \\  \hline  64 \phantom{00} \\  - \quad 64 \phantom{00} \\  \hline  0  \end{array}  $	<p>Größte Quadratzahl kleinergleich als 10 ist 9. Daher ist <math>a = 3</math>.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1). Dividiere die erhaltene Zahl durch <math>2a</math>: <math>11 : (2 \cdot 3) = 1 + \text{Rest} \rightarrow b = 1</math>. Subtrahiere <math>2ab = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6</math></p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1). Subtrahiere <math>b^2 = 1</math>.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 2). Bilde die Zahl aus den bisher bekannten Ziffern <math>a</math> und <math>b</math> (hier 31). Dividiere die erhaltene Zahl durch das Doppelte dieser Zahl: <math>502 : (2 \cdot 31) = 8 + \text{Rest} \rightarrow c = 8</math>. Bilde das Produkt <math>2 \cdot (\text{Zahl mit den bekannten Ziffern } a \text{ und } b) \cdot c</math> <math>= 2 \cdot 31 \cdot 8 = 496</math>. Subtrahiere das Ergebnis dieses Produktes.</p> <p>Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 4). Subtrahiere <math>c^2 = 64</math>.</p>
--	--

Wir erhalten  $\sqrt{101124} = 318$  ( $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 8$ ).

**Lösung zu Arbeitsauftrag (2):****Begründung des Verfahrens:**

Bezeichnen wir die Hunderterziffer des Ergebnisses mit  $a$ , die Zehnerziffer mit  $b$  und die Einerziffer mit  $c$ , so erhält man mit Hilfe der ersten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} 700569 &= (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 = (a \cdot 100 + b \cdot 10)^2 + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 \\ &= (a^2 \cdot 10\,000 + 2ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100) + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Die zunächst betrachtete Zahl 70 sind die Zehntausender, die überwiegend vom Term  $a^2 \cdot 10\,000$  erzeugt werden. Im Beispiel sind es  $8^2 = 64$  Zehntausender, die im ersten Schritt subtrahiert werden.

Holt man die erste Ziffer nach unten, so erhält man die verbleibenden 60 Tausender. Das Verfahren nimmt nun an, dass diese überwiegend vom Term  $2ab \cdot 1000$  erzeugt werden und bestimmt daraus den Wert für  $b$ .<sup>1</sup> Anschließend werden  $2ab$  Tausender, also der Term  $2ab \cdot 1000$  subtrahiert.

Holt man die nächste Ziffer nach unten, so erhält man die verbleibenden 125 Hunderter. Es werden noch  $b^2$  Hunderter, also der Term  $b^2 \cdot 100$  subtrahiert.

Holt man die nächste Ziffer nach unten, so erhält man die verbleibenden 1166 Zehner. Der nächste, noch nicht subtrahierte, Term in (\*) ist

$$2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c = (a \cdot 10 + b \cdot 1) \cdot c \cdot 10$$

Dieser beschreibt also  $(a \cdot 10 + b \cdot 1) \cdot c$  Zehner.  $(a \cdot 10 + b \cdot 1)$  ist dabei die Zahl, die man aus den bisher bekannten Ziffern  $a$  und  $b$  bildet.  $c$  wird jetzt so groß, wie möglich bestimmt und nach Subtraktion bleiben nur noch  $c^2$  Einer übrig.

---

<sup>1</sup>Hierbei kann es zu Problemen kommen, wenn  $b^2$  zu groß ist. Vergleiche Arbeitsauftrag (3).

### Lösung zu Arbeitsauftrag (3):

#### Modifizierung des Verfahrens am Beispiel $\sqrt{239121}$

$$\begin{array}{r}
 239121 \\
 -16 \\
 \hline
 79 \\
 -72 \\
 \hline
 71 \\
 -81 \\
 \hline
 -10
 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleinergleich als 23 ist 16.  
Daher ist  $a = 4$ .

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 9).  
Dividiere die erhaltene Zahl durch  $2a$ :

$$79 : (2 \cdot 4) = 9 + \text{Rest} \rightarrow b = 9.$$

Subtrahiere  $2ab = 2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Subtrahiere  $b^2 = 81$ .

**Es ergibt sich ein negatives Ergebnis.**

$b$  ist daher zu groß. Korrigiere  $\rightarrow b = 8$

Wiederhole die letzten beiden Subtraktionen  
mit dem korrigierten  $b$ .

$$\begin{array}{r}
 239121 \\
 -16 \\
 \hline
 79 \\
 -64 \\
 \hline
 151 \\
 -64 \\
 \hline
 872 \\
 -864 \\
 \hline
 81 \\
 -81 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleiner als 23 ist 16.  
Daher ist  $a = 4$ .

**Korrigiertes  $b = 8$ .**

Subtrahiere  $2ab = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Subtrahiere  $b^2 = 64$ .

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 2).  
Bilde die Zahl aus den bisher bekannten Ziffern  
 $a$  und  $b$  (hier 48).

Dividiere die erhaltene Zahl durch das Doppelte  
dieser Zahl:  $872 : (2 \cdot 48) = 9 + \text{Rest} \rightarrow c = 9$ .

Bilde das Produkt

$$\begin{aligned}
 &2 \cdot (\text{Zahl mit den bekannten Ziffern } a \text{ und } b) \cdot c \\
 &= 2 \cdot 48 \cdot 9 = 864.
 \end{aligned}$$

Subtrahiere das Ergebnis dieses Produktes.

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Subtrahiere  $c^2 = 81$ .

Wir erhalten daher  $\sqrt{239121} = 489$  ( $a = 4$ ,  $b = 8$ ,  $c = 9$ ).

**Bemerkung:**

Bezeichnet man die Hunderterziffer des Ergebnisses mit  $a$ , die Zehnerziffer mit  $b$  und die Einerziffer mit  $c$ , so erhält man mit Hilfe der ersten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} 239121 &= (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 = (a \cdot 100 + b \cdot 10)^2 + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 \\ &= (a^2 \cdot 10\,000 + 2ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100) + 2(a \cdot 100 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Um  $b$  zu bestimmen, wird nur der Term  $2ab \cdot 1000$  betrachtet. Das sich ergebende  $b$  ist zu groß, da in diesem Fall der Term  $b^2 \cdot 100$  einen nicht unerheblichen Anteil liefert.

Konkret ergibt sich nach der ersten Subtraktion:

$$239121 - a^2 \cdot 10\,000 = 239121 - 16 \cdot 10\,000 = 79\,121$$

Für  $b = 9$  ergeben die Terme  $2ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100 = 72\,000 + 8100 = 80,1 \cdot 1000$ .

Der erste Summand ist noch kleiner als 79 121, aber da  $b^2$  zu groß ist, ist die Summe insgesamt größer als 79 121. Da das Verfahren zunächst  $b^2 \cdot 100$  vernachlässigt, liefert es in diesem Fall einen zu großen Wert von  $b$ .

## Anwendung des Verfahrens, um $\sqrt{151321}$ zu bestimmen

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 1\ 3\ 2\ 1 \\ -\ 9\phantom{00} \\ \hline 6\ 1 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleinergleich als 15 ist 9.  
Daher ist  $a = 3$ .

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Dividiere die erhaltene Zahl durch  $2a$ :

$$61 : (2 \cdot 3) = 10 + \text{Rest}$$

**10 als Ziffer ist nicht möglich.**

$b$  ist daher zu groß. Korrigiere  $\rightarrow b = 9$

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 1\ 3\ 2\ 1 \\ -\ 9\phantom{00} \\ \hline 6\ 1 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleinergleich als 15 ist 9.  
Daher ist  $a = 3$ .

**Korrigiertes  $b = 9$ .**

$$\begin{array}{r} -\ 5\ 4 \\ \hline 7\ 3 \end{array}$$

Subtrahiere  $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 3).  
Subtrahiere  $b^2 = 81$ .

$$\begin{array}{r} -\ 8\ 1 \\ \hline -8 \end{array}$$

**Es ergibt sich ein negatives Ergebnis.**

$b$  ist immer noch zu groß. Korrigiere  $\rightarrow b = 8$

Wiederhole die letzten beiden Subtraktionen  
mit dem korrigierten  $b$ .

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 1\ 3\ 2\ 1 \\ -\ 9\phantom{00} \\ \hline 6\ 1 \end{array}$$

Größte Quadratzahl kleinergleich als 15 ist 9.  
Daher ist  $a = 3$ .

**Korrigiertes  $b = 8$ .**

$$\begin{array}{r} -\ 4\ 8 \\ \hline 1\ 3\ 3 \end{array}$$

Subtrahiere  $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 3).  
Subtrahiere  $b^2 = 64$ .

$$\begin{array}{r} -\ 6\ 4 \\ \hline 6\ 9\ 2 \end{array}$$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 2).  
Bilde die Zahl aus den bisher bekannten Ziffern  
 $a$  und  $b$  (hier 38).

Dividiere die erhaltene Zahl durch das Doppelte  
dieser Zahl:  $692 : (2 \cdot 38) = 9 + \text{Rest} \rightarrow c = 9$ .

Bilde das Produkt

$$\begin{aligned} &2 \cdot (\text{Zahl mit den bekannten Ziffern } a \text{ und } b) \cdot c \\ &= 2 \cdot 38 \cdot 9 = 684. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -\ 6\ 8\ 4 \\ \hline 8\ 1 \end{array}$$

Subtrahiere das Ergebnis dieses Produktes.

$$\begin{array}{r} -\ 8\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Hole die nächste Ziffer nach unten (hier die 1).  
Subtrahiere  $c^2 = 81$ .

Wir erhalten daher  $\sqrt{151321} = 389$  ( $a = 3$ ,  $b = 8$ ,  $c = 9$ ).



## Hinweise zum Einsatz im Unterricht

Die Arbeitsaufträge vertiefen zum einen den Wurzelbegriff und zum anderen den Umgang mit der ersten binomischen Formel. Beide inhaltlichen Kompetenzen müssen den Schülerinnen und Schülern im Vorfeld zur Verfügung stehen.

Beim einfachen Arbeitsauftrag (1) sollen die Schülerinnen und Schüler ein vorgestelltes Verfahren auf ein neues Beispiel anwenden. Dies sollte alle Schülerinnen und Schüler vor keine allzugroßen Probleme stellen.

Die Begründungen in Arbeitsauftrag (2) sind deutlich herausfordernder und werden daher durch Hilfekarten unterstützt.

Arbeitsauftrag (3) fordert zunächst eine Analysekompetenz der auftretenden Problematik und anschließend eine kreative Modifikation des Verfahrens. Im letzten Beispiel tritt dann noch ein zusätzliches Problem auf, das gelöst werden muss.

Die maximale Anzahl der Ziffern, die die Wurzel einer 6-stellige Zahl hat, kann zum Einstieg im Plenum geklärt werden.

Ferner können die Schülerinnen und Schüler zu Beginn darauf hingewiesen werden, dass im Verfahren die verwendeten Divisionen mit Rest ausgeführt werden.

Zeitbedarf: 45 – 90 Minuten