„Argumentieren und Begründen“ am Beispiel der Teilbarkeit

Im Bereich der Teilbarkeit ist es leicht möglich, Argumentieren und Begründen auf dem Niveau von Fünft- und Sechstklässlern zu üben. Dabei geht man natürlich altersgemäß vor und beschränkt sich auf die Begründung konkreter Beispiele (die aber durchaus hier und da verallgemeinert werden können).

Dabei spielen selbstverständlich nicht alle Aspekte eine Rolle, die als Teilkompetenzen der Argumentationskompetenz aufgelistet sind. Beispielsweise kann man zu diesem Zeitpunkt und in diesem Kontext noch keine „mathematischen Denkstrukturen entwickeln“, d.h.

- in einer mathematischen Aussage zwischen Voraussetzung und Behauptung unterscheiden,
- eine mathematische Aussage in einer standardisierten Form (zum Beispiel Wenn-Dann) formulieren,
- zwischen einem Satz und seinem Kehrsatz unterscheiden und den Unterschied an Beispielen erklären.

Fokussieren kann man aber folgende Teilkompetenzen:

Fragen stellen und Vermutungen begründet äußern

- in mathematischen Zusammenhängen Vermutungen entwickeln und als mathematische Aussage formulieren;
- eine Vermutung anhand von Beispielen auf ihre Plausibilität prüfen oder anhand eines Gegenbeispiels widerlegen;
- bei der Entwicklung und Prüfung von Vermutungen den Taschenrechner verwenden;

Mathematische Argumentationen (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) nachvollziehen und entwickeln

- mehrschrittige Argumentationsketten aufbauen;
- Lösungswege beschreiben und begründen;

Beispiele von Unterrichtsfragen, mit denen die prozessbezogene Kompetenz „Argumentieren und Begründen“ in der Teilbarkeit geschult werden kann:

1 a) Ist jede durch 4 (9) teilbare Zahl ist auch durch 2 (3) teilbar?

b) Ist jede durch 2 (3, 6) teilbare Zahl auch durch 4 (9,12) teilbar?

2 a) Ist eine Zahl durch 6 teilbar, wenn sie gleichzeitig durch 2 und 3 teilbar ist?

b) Ist eine Zahl durch 8 teilbar, wenn sie gleichzeitig durch 2 und 4 teilbar ist?

3 a) Sind alle Zweierpotenzen gerade?

b) Sind alle Primzahlen ungerade?

4 a) Sind die Quadratzahlen abwechselnd ungerade und gerade?

b) Gibt es Quadratzahlen, die gleichzeitig Primzahlen sind?

c) Wächst der Abstand von Quadratzahlen wächst ständig an?

5 Peter behauptet: „Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 4 teilbar ist.“ Stimmt das? Begründe.

6 Im Theater soll Herr Maier für 29 Schüler jeweils 18 Euro zahlen. Die Kassiererin verlangt 525 Euro und Herr Maier sagt in Sekundenschnelle „Das kann nicht sein!“ Woher weiß er das so schnell ohne zu rechnen?

7 Sind alle durch 11 teilbaren Zahlen Schnapszahlen?

8 Peter meint: „Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 5 teilbar ist.“ Stimmt das? Begründe.

9 Sinkt die Einerziffer in der Neunerreihe immer um Eins?

10 Stimmt das? „Die Hunderterziffer ist egal, wenn es um die Teilbarkeit von 2 (4, 5, 10) geht.“ Begründe.

11 Andreas meint: „Da man zu jedem Teiler auch einen Ergänzungsteiler findet, ist die Anzahl der Teiler immer gerade.“ Stimmt das?

12 $49 = 7^2$ also $T_{49} = \{1, 7, 49\}$. Haben also alle Quadratzahlen 3 Teiler?

13 Hakan ist der Meinung, dass man beim Anwenden der Quersummenregel für die Teilbarkeit durch 3 (9), alle 3er (9er) weglassen kann. Stimmt das? Erläutere deine Aussage.

14 Haben Zahlen mit derselben Quersumme (Endziffer) auch dieselben Teiler? Begründe.

15 Luca sagt: „Ist die Quersumme zweistellig, so kann man erneut die Quersumme bilden und es genügt, nur diese für die Teilbarkeit zu betrachten.“ Stimmt das? Begründe.

16 Wie kann man die folgende Zerlegung der Zahl 8415 verwenden, um die Teilbarkeit durch 5 zu begründen: $8415 = 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 5$

17 Wie kann man die folgende Zerlegung der Zahl 8412 verwenden, um die Teilbarkeit durch 4 zu begründen: $8412 = 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 12$

18 Wie kann man die folgende Zerlegung der Zahl 6534 fortsetzen, um zu begründen, dass die Quersumme über die Teilbarkeit durch 3 (9) entscheidet?
$6534 = 6 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 =$
$= 6 \cdot (999 + 1) + 5 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 4 = ???$

19 Kann die Quersumme einer Primzahl durch 5 teilbar sein?

20 Ist die echte Teilersumme einer Primzahl immer 1?

21 Ist die echte Teilersumme einer Zahl ist immer kleiner als die Zahl selbst?

22 Haben zwei verschiedene Primzahlen außer der 1 keine weiteren Teiler?

23 a) Leon meint: „Um eine Primzahl zu testen muss man nur bis zur ihrer Hälfte prüfen.“ Stimmt das? Begründe.

b) Julia meint: „Um eine Primzahl zu testen muss man nur die kleineren Primzahlen prüfen.“ Stimmt das? Begründe.

c) Alexandra behauptet sogar, dass es genügt, bis zu der Primzahl zu prüfen, deren Quadrat über der Zahl liegt. Begründe.

24 Ist 117 (101, 111) eine Primzahl?

25 Lässt sich aus den Ziffern 1, 2 und 3 eine Primzahl bilden?

26 Erhöht sich die Teileranzahl einer Zahl, wenn man sie verdoppelt?

27 a) Gibt es eine Zahl mit nur einem Teiler?

b) Gibt es eine Zahl mit unendlich vielen Teilern?

c) Gibt es eine Zahl ohne jeden Teiler?

28 a) Haben gerade Zahlen außer 1 immer mindestens einen gemeinsamen Teiler?

b) Haben ungerade Zahlen außer 1 immer mindestens einen gemeinsamen Teiler?

29 Haben Zweierpotenzen keine verschiedenen Primfaktoren?

30 Haben Quadratzahlen keine verschiedenen Primfaktoren?