Mögliche inhaltliche Ergänzungen zur Teilbarkeit

nach U.Wagner, OHG Tuttlingen

Vorbemerkungen:

- Es ist keineswegs an alle Inhalte gedacht eine <u>sehr beschränkte</u> Auswahl ist sinnvoll.
- Insbesondere das Thema „besondere Eigenschaften von Zahlen“ ermitteln ist reizvoll, hierzu braucht man als einzige weitere Fähigkeit das systematische Bestimmen von Teilermengen mit Ergänzungsteiler, was aber ohnehin sinnvoll ist.
- Ob man Zahlen und ihren Eigenschaften dann noch griffige Namen gibt, ist Geschmackssache. Die Schüler suchen „(stink)reiche“ Zahlen aber lieber als „abundante“ bzw. „Chefzahlen“ lieber als „superabdundante“ oder „hochzusammen-gesetzte“.
- Innerhalb der Teilbereiche von oben nach unten mit sinkender Verbindlichkeit aber größeren Chancen für Binnendifferenzierung angeordnet.

Teilbarkeitsregeln:

- Kennen
  - obligatorische: 2,3,5,6,9,10
  - weitere: 4,8,11,15,20,25
  - Summen- und Differenzregel
  - Transitivitätsregel („Fischregel“; lässt sich am einfachsten erklären und zeichnen mit drei Fischen: wenn der große Fisch den mittleren frisst und dieser den kleinen, dann frisst auch der größere a den kleinen)
- Anwenden
- Begründung nachvollziehen
- Begründung durchführen

Primzahlen

- Kennen
  - bis 50
  - bis 100
- Sieb des Erathostenes
- Primfaktoren bestimmen (mit/ohne Hochzahldarstellung)

- Primzahlprüfung durchführen
- Primzahlprüfung mit Primzahlen („bis zur Mitte“) verstehen
- Euklid-Beweis zum Nichtabbrechen der Primzahlfolge
- Primzahlformeln prüfen

Eigenschaften von Zahlen

- Besondere Zahlen erkennen
  - Prim(a)zahlen
  - Quadratzahlen
  - Dreieckszahlen
  - Zweierpotenzen
  - Kubikzahlen
  - „Hasenzahlen“ („Fibonacci-Zahlen“)
  - Entdeckung von besonderen Zahlen im Pascal-Dreieck
- Besondere Eigenschaften ermitteln
  - Teileranzahlen (mit Ergänzungsteiler und/oder Primfaktorzerlegung) bestimmen
  - „Chefzahlen“ ermitteln (größte Teileranzahl bis dato: „hochzusammengesetzte“ oder „superabundante“ Zahlen: 1,2,4,6,12,24,36,48,60,120,…)
  - „besondere Chefzahlen“ prüfen (erst vom Doppelten übertrumpft: 1,2,6,12,60,360,2520)
  - „Siegerzahlen“ ermitteln (größte Teileranzahl im zweistelligen Bereich: 60,72,84,90,96)
  - (echte) Teilersummen berechnen und Auffinden von
    - „armen“ („defizienten“) Zahlen (Teilersumme kleiner als Zahl)
    - „reichen“ („abundanten“) Zahlen (Teilersumme größer als Zahl)
    - „perfekten“ („vollkommenen“) Zahlen (Teilersumme gleich Zahl: 6,28) mit Teilersumme (mit Euklid/Euler-Formel weitere: $2^{p-1}(2^p - 1)$, fast perfekte Zahlen)
    - „befreundete“ Zahlen (Teilersummen sind wechselseitig gleich Zahl: 220 und 284)
    - „bettelarme“ und „stinkreiche“ Zahlen (Teilersumme liegt um mindestens 50% neben der Zahl)

Mögliche ergänzende Aufgaben

Vorbemerkungen:

- Vieles ist binnendifferenziert möglich.
- Einige Ideen findet man im „Zahlenteufel“ von Enzensberger, der als Begleitlektüre sinnvoll einsetzbar ist.

Produktives/Entdeckendes Üben:

- Wähle beliebige dreistellige Zahl, bilde neue Zahl durch Wiederholen (abcabc), dividiere nacheinander durch 13, 11 und 7
- Wähle eine Zahl mit aufsteigenden Ziffern und lass sie wieder absteigen 1234321 („Palindrom“), dividiere sie durch 1111 (Anzahl entsprechend der aufsteigenden Zahlen)
- Färbe im Pascal-Dreieck Kästchen mit Vielfache von vier (fünf,...). Was fällt auf?
- Suche im Pascal-Dreieck nach Dreieckszahlen, Quadratzahlen usw.
- Welche zweistelligen Zahlen
  - haben bis dato die meisten Teiler („Chefzahlen“)?
    (Werden erst von ihrem Doppelten abgelöst („besondere Chefzahlen“)?)
  - haben insgesamt die meisten Teiler („Siegerzahlen“)?
  - sind (bettel)arm, (stink)reich oder perfekt? Erstelle eine Übersicht (ein Diagramm)! Ergebnis ist (wie im wahren Leben): 22 reich (davon 8 stinkreich), 76 arm (davon 45 bettelarm und 2 perfekt)
  - haben 1,2,3,4,5,… Teiler? Erstelle eine Übersicht (ein Diagramm)! Ergebnis: 1 Teiler: 1 Zahl, 2T: 25Z (!), 3T: 4Z, 4T: 32Z (!), 5T: 2Z, 6T: 16Z, 7T: 1Z, 8T: 10Z, 9T: 2Z, 10T: 2Z, 11T: 0Z, 12T: 5Z
- Probiere die Teilerzahl aus der Primfaktorzerlegung zu bestimmen, beginne mit den Zweierpotenzen, multipliziere sie dann mit 3, dann noch einmal mit 2 usw.
- Welche dreistellige Zahl hat die meisten Teiler? Probiere mit der Primfaktorzerlegung eine Lösung (840 hat 32 Teiler).
- Warum haben die meisten Zahlen eine gerade Teilerzahl?
- Welche Zahlen haben drei Teiler? Haben alle Quadratzahlen drei (fünf, sieben) Teiler?

- Stelle eine Zahl mit 11 Teilern her!
- Jede Zahl (größer als 3) lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen (Goldbachsche Vermutung): Probiere aus!
- Jede Zahl (größer als 3) lässt sich als Summer höchstens dreier Dreieckszahlen darstellen: Probiere aus! Bei welchen Zahlen reichen zwei Dreieckszahlen?
- Erhält man mit $n^2 + n + 17$ (Eulerformel) immer eine Primazahl? Prüfe nach!
- Prüfe nach, ob die perfekten Zahlen 6 und 28 mit der Formel $2^{p-1}(2^p - 1)$ berechenbar sind.
  Berechne damit weitere perfekte Zahlen.
- Berechne die Teilersumme von 220 und 284. War fällt auf?

Zusammenhänge entdecken:

- Bestimme die Teilersummen von Zweierpotenzen. Was fällt auf?
- Welche Primazahlen sind auch Hasenzahlen?
- Welche Dreieckszahlen sind auch Hasenzahlen?
- Welche Dreieckszahlen sind auch Quadratzahlen?
- Welche Zweierpotenzen sind auch Quadratzahlen?
- Sind alle Primzahlen bettelarm? Warum?
- Sind alle Quadratzahlen arm?
- Sind alle Chefzahlen stinkreich?
- Addiere benachbarte Dreieckszahlen. Was fällt auf?
- Subtrahiere benachbarte Quadratzahlen. Was fällt auf?
- Addiere die Quadrate benachbarter Hasenzahlen. Was fällt auf?
- …

Anlage: Zahlenübersicht

Zahl	Prim-faktor-zerlegung	Teiler					Eigenschaft
		Liste	An-zahl	(echte) Summe	Abwei-chung	Status	
1	1	1	1	0	- 100 %	(bettel)arm	Quadratzahl, Kubikzahl, Hasenzahl, bes. Chefzahl
2	2	1,2	2	1	- 50 %	(bettel)arm	Primazahl, Zweierpotenz, Hasenzahl, bes. Chefzahl
3	3	1,3	2	1	- 67 %	(bettel)arm	Primazahl, Dreieckszahl, Hasenzahl
4	2^2	1,2,4	3	3	- 25 %	arm	Quadratzahl, Zweierpotenz, Chefzahl
5	5	1,5	2	1	- 80 %	(bettel)arm	Primazahl, Hasenzahl
6	$2 \cdot 3$	1,2,3,6	4	6	± 0 %	perfekt	Dreieckszahl, bes. Chefzahl
7	7	1,7	2	1	- 86 %	(bettel)arm	Primazahl
8	2^3	1,2,4,8	4	7	- 13 %	arm	Zweierpotenz,Kubikzahl, Hasenzahl
9	3^2	1,3,9	3	4	- 56 %	(bettel)arm	Quadratzahl
10	$2 \cdot 5$	1,2,5,10	4	8	- 20 %	arm	Dreieckszahl
11	11	1,11	2	1	- 91 %	(bettel)arm	Primazahl
12	$2^2 \cdot 3$	1,2,3,4,6,12	6	16	+ 25 %	reich	Bes. Chefzahl
13	13	1,13	2	1	- 92 %	(bettel)arm	Primazahl, Hasenzahl
14	$2 \cdot 7$	1,2,7,14	4	10	- 29 %	arm	
15	$3 \cdot 5$	1,3,5,15	4	9	- 40 %	arm	Dreieckszahl
16	2^4	1,2,4,8,16	5	15	- 6 %	arm, fast perfekt	Quadratzahl, Zweierpotenz
17	17	1,17	2	1	- 94 %	(bettel)arm	Primazahl
18	$2 \cdot 3^2$	1,2,3,6,9,18	6	21	+ 17 %	reich	
19	19	1,19	2	1	- 95 %	(bettel)arm	Primazahl
20	$2^2 \cdot 5$	1,2,4,5,10, 20	6	26	+ 30 %	reich	
21	$3 \cdot 7$	1,3,7,21	4	11	- 48 %	arm	Dreieckszahl, Hasenzahl
22	$2 \cdot 11$	1,2,11,22	4	14	- 36 %	arm	

23	23	1,23	2	1	- 96 %	(bettel)arm	Primazahl
24	$2^3 \cdot 3$	1,2,3,4,6,8, 12,24	8	36	+ 50 %	(stink)reich	Chefzahl
25	5^2	1,5,25	3	6	- 76 %	(bettel)arm	Quadratzahl
26	$2 \cdot 13$	1,2,13,26	4	16	- 38 %	arm	
27	3^3	1,3,9,27	4	13	- 52 %	(bettel)arm	Kubikzahl
28	$2^2 \cdot 7$	1,2,4,7,14, 28	6	28	± 0 %	perfekt	Dreieckszahl
29	29	1,29	2	1	- 97 %	(bettel)arm	Primazahl
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	1,2,3,5,6,10, 15,30	8	42	+ 40 %	reich	
31	31	1,31	2	1	- 97 %	(bettel)arm	Primazahl
32	2^5	1,2,4,8,16, 32	6	31	- 3 %	arm, fast perfekt	Zweierpotenz
33	$3 \cdot 11$	1,3,11,33	4	15	- 55 %	(bettel)arm	
34	$2 \cdot 17$	1,2,17,34	4	20	- 41 %	arm	Hasenzahl
35	$5 \cdot 7$	1,5,7,35	4	13	- 63 %	(bettel)arm	
36	$2^2 \cdot 3^2$	1,2,3,4,6,9, 12,18,36	9	55	+ 53 %	(stink)reich	Quadratzahl, Dreieckszahl, Chefzahl
37	37	1,37	2	1	- 97 %	(bettel)arm	Primazahl
38	$2 \cdot 19$	1,2,19,38	4	22	- 42 %	arm	
39	$3 \cdot 13$	1,3,13,39	4	17	- 56 %	(bettel)arm	
40	$2^3 \cdot 5$	1,2,4,5,8,10, 20,40	8	50	+ 25 %	reich	
41	41	1,41	2	1	- 98 %	(bettel)arm	Primazahl
42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	1,2,3,6,7,14, 21,42	8	54	+ 29 %	reich	
43	43	1,43	2	1	- 98 %	(bettel)arm	Primazahl
44	$2^2 \cdot 11$	1,2,4,11,22, 44	6	40	- 9 %	arm	
45	$3^2 \cdot 5$	1,3,5,9,15, 45	6	33	- 27 %	arm	Dreieckszahl
46	$2 \cdot 23$	1,2,23,46	4	26	- 43 %	arm	
47	47	1,47	2	1	- 98 %	(bettel)arm	Primazahl
48	$2^4 \cdot 3$	1,2,3,4,6,8, 12,16,24,48	10	76	+ 58 %	(stink)reich	Chefzahl
49	7^2	1,7,49	3	8	- 84 %	(bettel)arm	Quadratzahl
50	$2 \cdot 5^2$	1,2,5,10,25, 50	6	43	- 14 %	arm	
51	$3 \cdot 17$	1,3,17,51	4	21	- 59 %	(bettel)arm	
52	$2^2 \cdot 13$	1,2,4,13,26, 52	6	46	- 12 %	arm	

53	53	1,53	2	1	- 98 %	(bettel)arm	Primzahl
54	$2 \cdot 3^3$	1,2,3,6,9,18, 27,54	8	66	+ 22 %	reich	
55	$5 \cdot 11$	1,5,11,55	4	17	- 69 %	(bettel)arm	Dreieckszahl, Hasenzahl
56	$2^3 \cdot 7$	1,2,4,7,8,14, 28,56	8	64	+ 14 %	reich	
57	$3 \cdot 19$	1,3,19,57	4	23	- 60 %	(bettel)arm	
58	$2 \cdot 29$	1,2,29,58	4	32	- 45 %	arm	
59	59	1,59	2	1	- 98 %	(bettel)arm	Primazahl
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	1,2,3,4,5,6, 10,12,15,20, 30,60	12	108	+ 80 %	(stink)reich	bes. Chefzahl, Siegerzahl
61	61	1,61	2	1	- 98 %	(bettel)arm	Primazahl
62	$2 \cdot 31$	1,2,31,62	4	34	- 45 %	arm	
63	$3^2 \cdot 7$	1,3,7,9,21, 63	6	41	- 35 %	arm	
64	2^6	1,2,4,8,16, 32,64	7	63	- 2 %	arm, fast perfekt	Quadratzahl, Zweierpotenz Kubikzahl
65	$5 \cdot 13$	1,5,13,65	4	19	- 71 %	(bettel)arm	
66	$2 \cdot 3 \cdot 11$	1,2,3,6,11, 22,33,66	8	78	+ 18 %	reich	Dreieckszahl
67	67	1,67	2	1	- 99 %	(bettel)arm	Primazahl
68	$2^2 \cdot 17$	1,2,4,17,34, 68	6	58	- 15 %	arm	
69	$3 \cdot 23$	1,3,23,69	4	27	- 61 %	(bettel)arm	
70	$2 \cdot 5 \cdot 7$	1,2,5,7,10, 14,35,70	8	74	+ 6 %	reich	
71	71	1,71	2	1	- 99 %	(bettel)arm	Primazahl
72	$2^3 \cdot 3^2$	1,2,3,4,6,8, 9,12,18,24, 36,72	12	123	+ 71 %	(stink)reich	Siegerzahl
73	73	1,73	2	1	- 99 %	(bettel)arm	Primazahl
74	$2 \cdot 37$	1,2,37,74	4	40	- 46 %	arm	
75	$3 \cdot 5^2$	1,3,5,15,25, 75	6	48	- 36 %	arm	
76	$2^2 \cdot 19$	1,2,4,19,38, 76	6	64	- 16 %	arm	
77	$7 \cdot 11$	1,7,11,77	4	19	- 75 %	(bettel)arm	
78	$2 \cdot 3 \cdot 13$	1,2,3,6,13, 26,39,78	8	90	+ 15 %	reich	Dreieckszahl
79	79	1,79	2	1	- 99 %	(bettel)arm	Primazahl

80	$2^4 \cdot 5$	1,2,4,5,8,10, 16,20,40,80	10	106	+ 33 %	reich	
81	3^4	1,3,9,27,81	5	40	- 51 %	(bettel)arm	Quadratzahl
82	$2 \cdot 41$	1,2,41,82	4	44	- 46 %	arm	
83	83	1,83	2	1	- 99 %	(bettel)arm	Primazahl
84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	1,2,3,4,6,7, 12,14,21,28, 42,84	12	140	+ 67 %	(stink)reich	Siegerzahl
85	$5 \cdot 17$	1,5,17,85	4	23	- 73 %	(bettel)arm	
86	$2 \cdot 43$	1,2,43,86	4	46	- 47 %	arm	
87	$3 \cdot 29$	1,3,29,87	4	33	- 62 %	(bettel)arm	
88	$2^3 \cdot 11$	1,2,4,8,11, 22,44,88	8	92	+ 5 %	reich	
89	89	1,89	2	1	- 99 %	(bettel)arm	Primazahl, Hasenzahl
90	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	1,2,3,5,6,9, 10,15,18, 30,45,90	12	144	+ 60 %	(stink)reich	Siegerzahl
91	$7 \cdot 13$	1,7,13,91	4	21	- 77 %	(bettel)arm	Dreieckszahl
92	$2^2 \cdot 23$	1,2,4,23,46, 92	6	76	- 17 %	arm	
93	$3 \cdot 31$	1,3,31,93	4	35	- 62 %	(bettel)arm	
94	$2 \cdot 47$	1,2,47,94	4	50	- 47 %	arm	
95	$5 \cdot 19$	1,5,19,95	4	25	- 74 %	(bettel)arm	
96	$2^5 \cdot 3$	1,2,3,4,6,8, 12,16,24,32, 48,96	12	156	+ 63 %	(stink)reich	Siegerzahl
97	97	1,97	2	1	- 99 %	(bettel)arm	Primazahl
98	$2 \cdot 7^2$	1,2,7,14,49, 98	6	73	- 26 %	arm	
99	$3^2 \cdot 11$	1,3,9,11,33, 99	6	57	- 42 %	arm	
100	$2^2 \cdot 5^2$	1,2,4,5,10, 20,25,50, 100	9	117	+ 17 %	reich	Quadratzahl