Wurzeln und Irrationalität

nach U.Wagner, OHG Tuttlingen

Inhaltsbezogene Kompetenzen: Standards 6

(3) …Primfaktoren bestimmen…

(9) erläutern, dass zwischen zwei verschiedenen *rationalen Zahlen* stets beliebig viele weitere *rationale Zahlen* liegen

(10) Brüche in *Dezimalzahlen* (abbrechend oder periodisch) und abbrechende *Dezimalzahlen* in *Brüche* umwandeln

M A T H E
A Z H
T P T
H G A
E H T A M

Irrationalität spiralcurricular vorbereiten

- Rationale Zahlen liegen dicht, es drängen sich also „sehr viele“ Brüche auf dem Zahlenstrahl:

  Nichts an reellen Zahlen ist beeindruckend, wenn nicht vorher die große Zahl der Brüche beeindruckt hat!

- Brüche lassen sich in genau zwei Arten von Dezimalzahlen umwandeln: abbrechend oder periodisch

  Dies ist der Aufhänger für die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung!

Wurzeln und Irrationalität

Rückblick: Standards 6 | Standards 8: Wurzeln | Standards 8: Irrationalität

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Inhaltsbezogene Kompetenzen: Standards 8

Zu den Wurzeln:

(11) den Zusammenhang zwischen *Wurzelziehen* und *Quadrieren* erklären

(12) den Wert der *Quadratwurzel* einer Zahl in einfachen Fällen mithilfe benachbarter *Quadratzahlen* abschätzen

(13) Zahlterme mit *Quadratwurzeln* vereinfachen, auch durch teilweises *Wurzelziehen*

(14) anhand eines Beispiels erklären, dass im Allgemeinen $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ ist, aber $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ist

Anmerkungen zum Rechnen mit Wurzeln

- Abschätzen mit Quadratzahlen nur bei Kenntnis dieser (aus Klasse 5/6) möglich (Spiralcurriculum!)
- Inwieweit thematisiert man $\sqrt{a^2} = |a|$? Differenzierung?
- Vereinfachung von Zahltermen und v.a. teilweises Wurzelziehen nicht als Selbstzweck, z.B.:
  - $\sqrt{5} + \sqrt{20}$
  - Schätze $\sqrt{1000}$ ab
  - Begründe mit Wurzeldefinition, dass $\sqrt{16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

Anmerkungen zum Rechnen mit Wurzeln

- Nenner rational machen in Fällen wie $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$?
  Oder sogar $\frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$? Binnendifferenziert? Gar nicht?
- Beispielerklärungen zu Rechenregeln nicht nur mit Quadrat-zahlen oder pythagoräischen Zahlentripeln durchführen?
  - $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ aber $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
  - $\sqrt{9} + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$ aber $\sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} < 6$
  - $\sqrt{15} + \sqrt{20} > 3 + 4 = 7$ aber $\sqrt{15 + 20} = \sqrt{35} < 6$
- Mögliche Methodik: Sternchenaufgaben

Inhaltsbezogene Kompetenzen: Standards 8

Zur Irrationalität:

(16) anhand geeigneter Beispiele die Unvollständigkeit der *rationalen Zahlen* beschreiben und die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung auf *reelle Zahlen* begründen

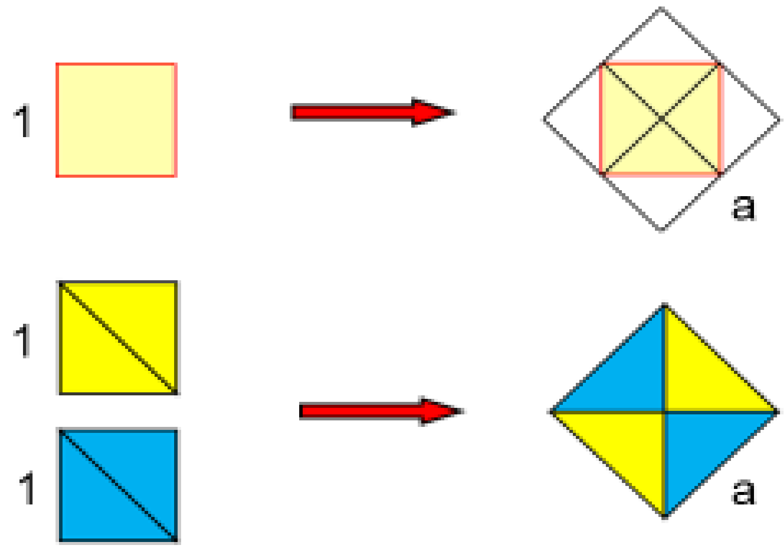
(17) Beispiele für *irrationale Zahlen* angeben

(18) ein iteratives Verfahren zur Bestimmung einer *Wurzel* durchführen

Anmerkungen zur Irrationalität

- Inhalte gelten nur für das E-Niveau, sind also gymnasial, wenn nicht sogar identitätsstiftend!
- Irrationale Zahlen sollten nicht nur auf Wurzeln beschränkt werden, andere Beispiele helfen bei der Begründung der Notwenigkeit einer Zahlbereichserweiterung:
  - 0,12345678910111213…
  - 0,10100100010000100000…
  - Jede weitere Nachkommastelle wird gewürfelt

Einführung der Wurzel: Quadratverdoppelung



Das große Quadrat hat den Inhalt 2.
Wie groß ist seine Seitenlänge a?

Wurzeln und Irrationalität

Standards 8: Irrationalität | Näherungsverfahren | Beweis der Irrationalität

Intervallhalbierungsverfahren

- Möglicher Einstieg: Ich denke mir eine zweistellige Zahl, die Du mit möglichst wenigen Versuchen erraten sollst.
  Ich sage Dir jeweils, ob Du zu hoch oder zu tief liegst.
- Vorgehen: Wähle durch Abschätzung benachbarte ganze Zahlen als Intervallgrenzen, halbiere das Intervall und entscheide durch Quadrieren der Mitte, ob die obere oder untere Hälfte des Intervalls als neues Intervall dient.

Intervallhalbierungsverfahren

- Vor- und Nachteile:
  - Leicht durchschaubar und am Zahlenstrahl darstellbar
  - Auf andere Probleme (Logarithmus) übertragbar, aber schwerfällig
  - Liefert durch fortgesetztes Quadrieren die Einsicht, dass Wurzeln von Nicht-Quadratzahlen nicht abbrechen können (Periodizität ist aber noch nicht auszuschließen!)

Intervall- oder Tabellenverfeinerung

- Intervall wird in Zehntelschritten quadriert, mit dem ersten Wert über dem Radikanten erhält man ein neues Intervall
- Neues Intervall wird in Hundertstelschritten quadriert …

$$\begin{array}{lllllllll} 1 & < & \sqrt{2} & < & 2 & \text{denn} & 1^2 & < 2 < & 2^2 \\ 1{,}4 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}5 & \text{denn} & 1{,}4^2 & < 2 < & 1{,}5^2 \\ 1{,}41 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}42 & \text{denn} & 1{,}41^2 & < 2 < & 1{,}42^2 \end{array}$$

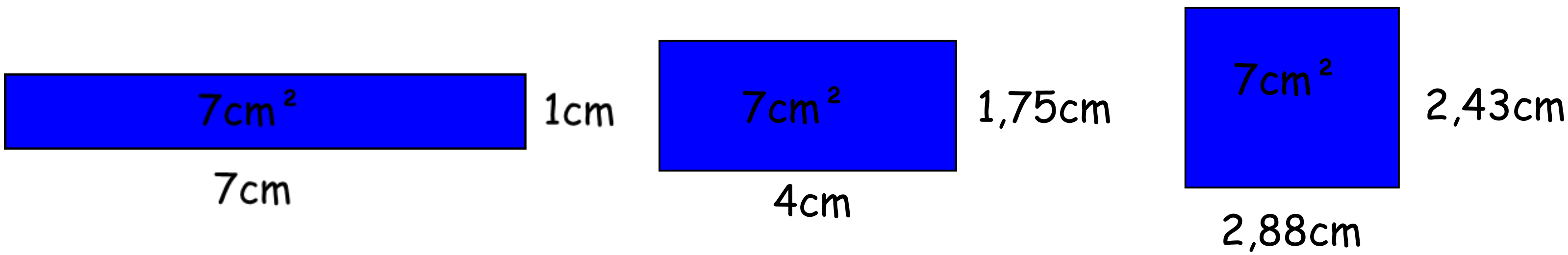
- Vor- und Nachteile: weniger schwerfällig, weniger anschaulich

  Zusätzlich: Vorgriff auf das Tabellen-Vorgehen bei Tests

Wurzeln und Irrationalität

Heronverfahren

- Man nähert ein Rechteck durch fortgesetzte Mittelwert-bildung schrittweise an ein flächengleiches Quadrat an.



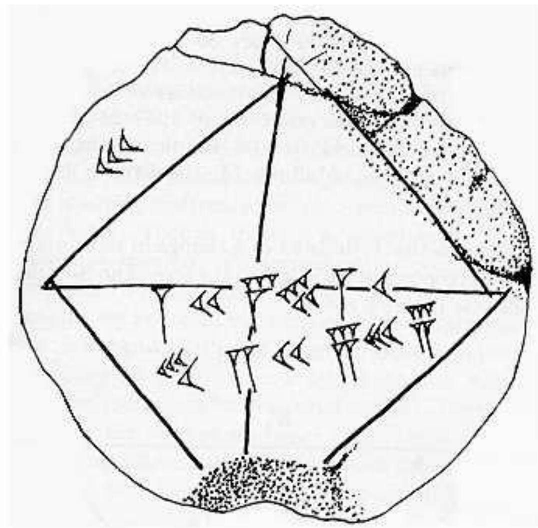
- Eine Seite ist Mittelwert der anfänglichen: $\frac{1}{2}(1+7)=4$
- Die andere Seite stellt die richtige Fläche her: $\frac{7}{4}=1{,}75$
- Insgesamt ergibt sich die Formel: $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$

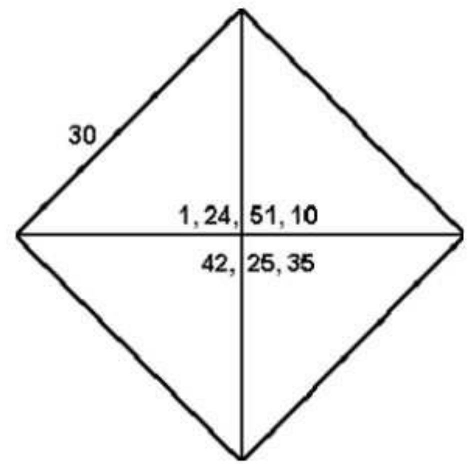
Heronverfahren

- Nachteile: Einsichten am Zahlenstrahl und durch Quadrieren bleiben verborgen
- Vorteile:
  - Geometrisch darstellbar und sehr schnell
  - Spezialfall des Newtonverfahrens für $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - \mathrm{a}$
  - Mit $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^k - \mathrm{a}$ auch Übertragung auf k-te Wurzeln möglich: $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$

    Es reicht auch $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$, falls $|\varphi'(x_0)| < 1$

Babylonisches Näherungsverfahren

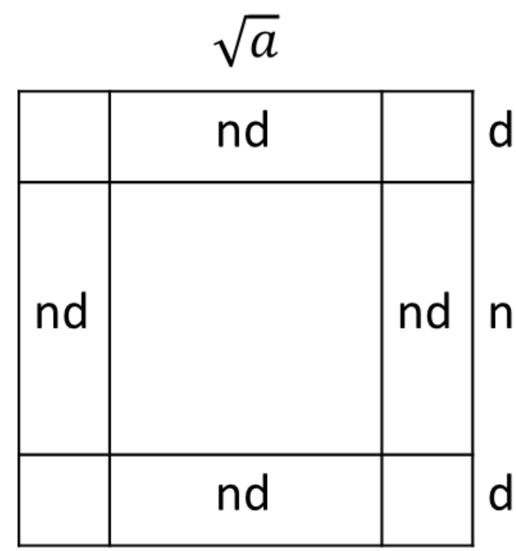




- Interpretation im 60er-System: $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$
- Ergebnis 1,414212963 weicht um ca. $4 \cdot 10^{-7}$ von $\sqrt{2}$ ab!
- Spektakuläre Genauigkeit ca. 1200 Jahre vor Pythagoras!

Babylonisches Näherungsverfahren

- Vorgehen für $\sqrt{a}$:
  - Wähle (nahe) Quadratzahl n^2 und zeichne zwei zentrumsgleiche Quadrate mit Seitenlängen $\sqrt{a}$ und n und deren Differenz ist $2d = \sqrt{a} - n$
  - Die Rahmenfläche r wird durch die vier Rechtecke angenähert: $r \approx 4nd$
  - Also ist $\sqrt{a} = n + 2d \approx n + \frac{r}{2n}$ und $r = a - n^2$



Babylonisches Näherungsverfahren

- Vorgehen für $\sqrt{2}$:
  - Man wählt: $n = 1$, damit $r = 1$, also: $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$
  - Verfahren ist nicht auf ganzzahlige n beschränkt und iterierbar:

    2.Schritt: $n = 1{,}5$, damit $r = -0{,}25$, also: $\sqrt{2} \approx 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}41\overline{6}$
- Nachteil: komplex, nur binnendifferenziert möglich?
- Vorteile: reichhaltige geschichtliche Bezüge möglich,

  Vorgriff auf Infinitesimalrechnung

Vergleich der Näherungsverfahren

Beweisverfahren für die Irrationalität von $\sqrt{2}$

- Beweis gar nicht im Unterricht thematisieren?

  Für mich indiskutabel: Gymnasiale Identität!

- Beweis nur binnendifferenziert für „WiMint-Schüler"?
  - Ja: Beweis ist anspruchsvoll und erfolgt zu früh
  - Nein: Wenn Schüler Notwendigkeit der Zahlbereichs-erweiterung begründen, wollen sie auch wissen, ob und warum $\sqrt{2}$ irrational ist

Beweisverfahren für die Irrationalität von $\sqrt{2}$

- Vorentlastung: Beweis durch Widerspruch im „Alltag“:
  - Annahme: Daniel ist ein netter Schüler (fiktiver (?) Querulant)
  - Dann ist Daniel auch nett zu Menschen
  - Da Lehrer auch Menschen sind (echt?) ist Daniel nett zu Lehrern
  - Widerspruch! Daniel ist kein netter Schüler!
- Zusätzliche Empfehlung: Nichtabbrechen der Primzahlfolge nach Euklid (auch zum Wiederaufgreifen: ZPG III)

Einschub: Nichtabbrechen der Primzahlfolge nach Euklid

- Annahme: es gibt eine größte Primzahl p
- Dann definieren wir die Zahl $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$
- Dann ist m durch keine Primzahl teilbar (Rest ist stets 1)
- Dann ist m entweder selbst eine Primzahl größer als p oder durch eine Zahl größer als p teilbar, die selbst Primzahl ist
- Widerspruch: p ist nicht die größte Primzahl!
- Anmerkung: Ausprobieren lehrreich!

  2+1 prim, $2 \cdot 3 + 1$ prim, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ prim, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ prim

  aber: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 59 \cdot 509$

Teilerwiderspruch nach Euklid, „klassisch“ (Song)

- Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, vollständig gekürzt
- Also ist $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder $2q^2 = p^2$
- Also ist p^2 gerade und damit p gerade (Vorentlasten!)
- Also kann man setzen: $p = 2r$ (Vorentlasten!)
- Somit $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$ oder $q^2 = 2r^2$
- Also ist q^2 gerade und damit auch q gerade (s.o.)
- Widerspruch zum vollständig gekürzten Bruch!
- Annahme falsch, $\sqrt{2}$ ist irrational

M A T H E
A Z H
T P T
H G A
E H T A M

Teilerwiderspruch nach Euklid

- Der analoge Beweis lässt sich auch mit $\sqrt{5}$ und $\sqrt{10}$ durchführen:

  aus p^2 durch 5 bzw. 10 teilbar folgt p durch 5 bzw. 10 teilbar

  erfolgt wieder durch Endstellenbetrachtung!

- Zum Kontrast sollte man auch zeigen, dass sich bei $\sqrt{4}$ kein Widerspruch einstellt:

  aus p^2 durch 4 teilbar folgt nur p gerade!

- Methodik: Vorbeweisen, Beweispuzzle, Lückentext…

Teilerwiderspruch nach Euklid

- Wie beweist man die Irrationalität anderer Wurzeln?

Alternative 1: Anzahl Primfaktoren verdoppelt sich beim Quadrieren

- Gleich bis $2q^2 = p^2$
- links ungerade, rechts gerade Anzahl des Primfaktors 2

Alternative 2: teilerfremde Zahlen sind nach Quadrieren teilerfremd, weil weder in Zähler noch im Nenner neue Primfaktoren „entstehen"

- Gleiche Annahme, weil 1<$\sqrt{2}$<2 gilt: q>1
- Dann ist $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ vollständig gekürzt mit $q^2 > 1$, also nicht natürlich

(Unendlicher) Abstieg nach Fermat

- Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p, q sind kleinstmögliche natürliche Zahlen
- Also $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder $2q^2 = p^2$, damit ist $p^2 > q^2$ und $p > q$

  und $(2q)^2 > 2q^2 = p^2$ ist $2q > p$
- Wir definieren: $n = p - q < q$ und $m = 2q - p < p$, beide natürlich
- Es gilt: $mq = (2q - p)q = 2q^2 - pq = p^2 - pq$

  und $np = (p - q)p = p^2 - pq = mq$, also: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, Widerspruch!
- Konkreter: $\frac{m}{n} = \frac{2q-p}{p-q} = \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}^2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2-1^2} = \sqrt{2}$
- Oder Nachrechnen: $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$ (?) also $2 - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}$ (!)

(Unendlicher) Abstieg nach Fermat

- Beweis so für Achtklässler zu heftig, kann aber anschaulich („rückwärts“) geführt werden!
- Oder mit Spielsteinen (Schülermaterial nach Ordowski)
- Oder mit Dreieckskonstruktion (nach Ordowski)
- Oder mit Ähnlichkeitskonstruktion
- Oder durch Falten mit DIN-Formaten (Schülermaterial nach Messner)
- Oder durch Kombination mit Euklid und damit Vermeidung von m und n (nächste Folie)

Wurzeln und Irrationalität

Näherungsverfahren | Beweis der Irrationalität | Das Fazit

Kombination von Euklid und Fermat

- Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p, q natürliche Zahlen
- Also ist $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder $2q^2 = p^2$
- Damit gilt einerseits: $p^2 > q^2$
- Aber auch: p^2 gerade und damit auch p gerade: $p = 2r$
- Somit $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$ oder $q^2 = 2r^2$
- Also andererseits: $q^2 > r^2$ und q gerade…
- Damit insgesamt: $p^2 > q^2 > r^2 > \cdots$
- Widerspruch: unendlich absteigende Folgen nat. Zahlen sind unmöglich

Fazit

- Wurzeln bieten Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung „nach oben"
- Näherungsverfahren bieten reichhaltige Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung „nach oben"
  - Es wäre schade, sich auf Intervallhalbierung zu beschränken
  - Als Regelstandard ist aber <u>ein</u> Verfahren ausreichend, dies kann aber auch z.B. das Heron-Verfahren sein
  - Bei Thematisierung mehrerer Verfahren muss die Wahl in Klassenarbeiten freigestellt und fair sein

Fazit

- Beweisverfahren bieten noch mehr:
  - Spiraliges Aufgreifen von Teilbarkeit, Primzahlen und –faktoren sowie Aufzeigen geometrischer Zusammenhänge
  - Sehr reichhaltige Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung
  - Beweisen ist kein Regelstandard, aber das Beweisen soll sich als prozessbezogene Kompetenz durch alle Klassen und Inhalte ziehen
  - hier ist eine großartige Möglichkeit, pk 1 (Begründen) zu bedienen (v.a. die Teilkompetenzen 10., 12. und 13.)
  - Es wäre sehr schade, wenn man hier nichts machen würde