

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

—

eine historisch und haptisch orientierte Herleitungen
von zentrischer Streckung und Strahlensätzen

AXEL GOY

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Bildungsplan 2016

3.2.3 Leitidee *Raum und Form*

Die Schülerinnen und Schüler decken einfache geometrische Zusammenhänge auf und begründen diese, dabei setzen sie sich auch mit der Umkehrung von Sätzen auseinander. Sie erschließen in einfachen geometrischen Figuren Winkelweiten und Streckenlängen. Die Schülerinnen und Schüler **lösen geometrische Probleme** unter Verwendung von Ortslinien zeichnerisch, falls angebracht auch **unter Verwendung dynamischer Geometriesoftware**. Sie untersuchen die Konstruierbarkeit von Dreiecken und die Lösungsvielfalt bei Dreieckskonstruktionen. Die Schülerinnen und Schüler **skizzieren geometrische Sachverhalte**. **Sie zeichnen Figuren maßstäblich, sie führen zentrische Streckungen durch und sie wenden die Strahlensätze an.** Lösungswege und geometrische Konstruktionen begründen sie fachsprachlich.

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Bildungsplan 2016

Mit zentrischer Streckung und den Strahlensätzen arbeiten

(11) durch *zentrische Streckung* (auch *negativer Streckfaktor*) Figuren *maßstäblich* vergrößern und verkleinern

P2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (5), (8)

(12) *Streckenlängen* unter Nutzung der *Strahlensätze* bestimmen

P2.2 Probleme lösen (1), (2), (3), (6), (16)

P2.3 Modellieren (1), (4)

P2.5 Kommunizieren (1), (2), (3), (6)

I3.2.1 Leitidee Zahl – Variable – Operation (19)

(13) die Nichtumkehrbarkeit des *zweiten Strahlensatzes* durch Angabe eines *Gegenbeispiels* begründen

P 2.1 Argumentieren und Beweisen (2), (6), (7)

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Bildungsplan 2016

PROBLEMLÖSEN

Probleme analysieren

- (1) das Problem mit eigenen Worten beschreiben
- (2) Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten
- (3) durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur, verbale Beschreibung, Tabelle, Graph, symbolische Darstellung, Koordinaten) das Problem durchdringen oder umformulieren

Strategien zum Problemlösen auswählen, anwenden und daraus einen Plan zur Lösung entwickeln

- (6) das Problem durch Zerlegen in Teilprobleme oder das Einführen von Hilfsgrößen oder Hilfslinien vereinfachen

die Lösung überprüfen und den Lösungsprozess reflektieren

- (16) Lösungswege vergleichen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Bildungsplan 2016

M
O
D
E
L
L
I
E
R
E
N

Realsituationen analysieren und aufbereiten

- (1) wesentliche Informationen entnehmen und strukturieren
- mathematisieren**
- (4) relevante Größen und ihre Beziehungen identifizieren

Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse darstellen

- (1) mathematische Einsichten und Lösungswege schriftlich dokumentieren oder mündlich darstellen und erläutern
 - (2) ihre Ergebnisse strukturiert präsentieren
 - (3) eigene Überlegungen in kurzen Beiträgen sowie selbstständige Problembearbeitungen in Vorträgen verständlich darstellen
- die Fachsprache angemessen und korrekt verwenden**
- (6) ihre Ausführungen mit geeigneten Fachbegriffen darlegen

K
O
M
M
U
N
I
Z
I
E
R
E
N

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Geometrie in den Klassen 7/8

Didaktisches

Begriffsverständnis

**Schüleraktivität
durch entdeckendes
Lernen**

Enaktivität

**Geometrie,
Klasse 8**

»Der Lernende soll
Mathematik in **statu
nascendi** erleben.«
[HANS FREUDENTHAL]

**WINTER'sche Grunder-
fahrungen ①, ② und ③**

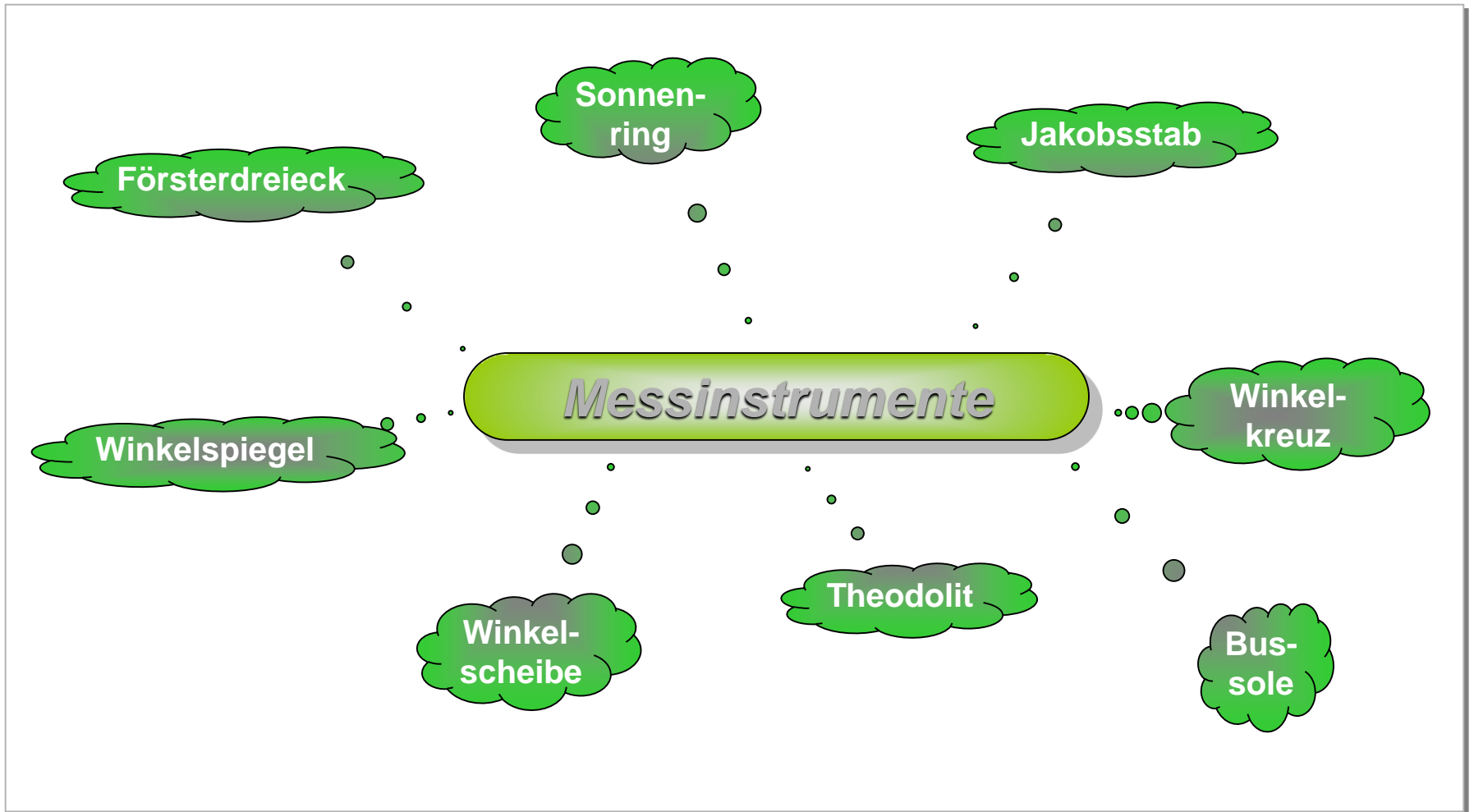
Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E	
A	Z			H	
T	P			T	
H	G				A
E	H	T	A	M	

BP-Bezug

Geometrie in den Klassen 7/8

Didaktisches



Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

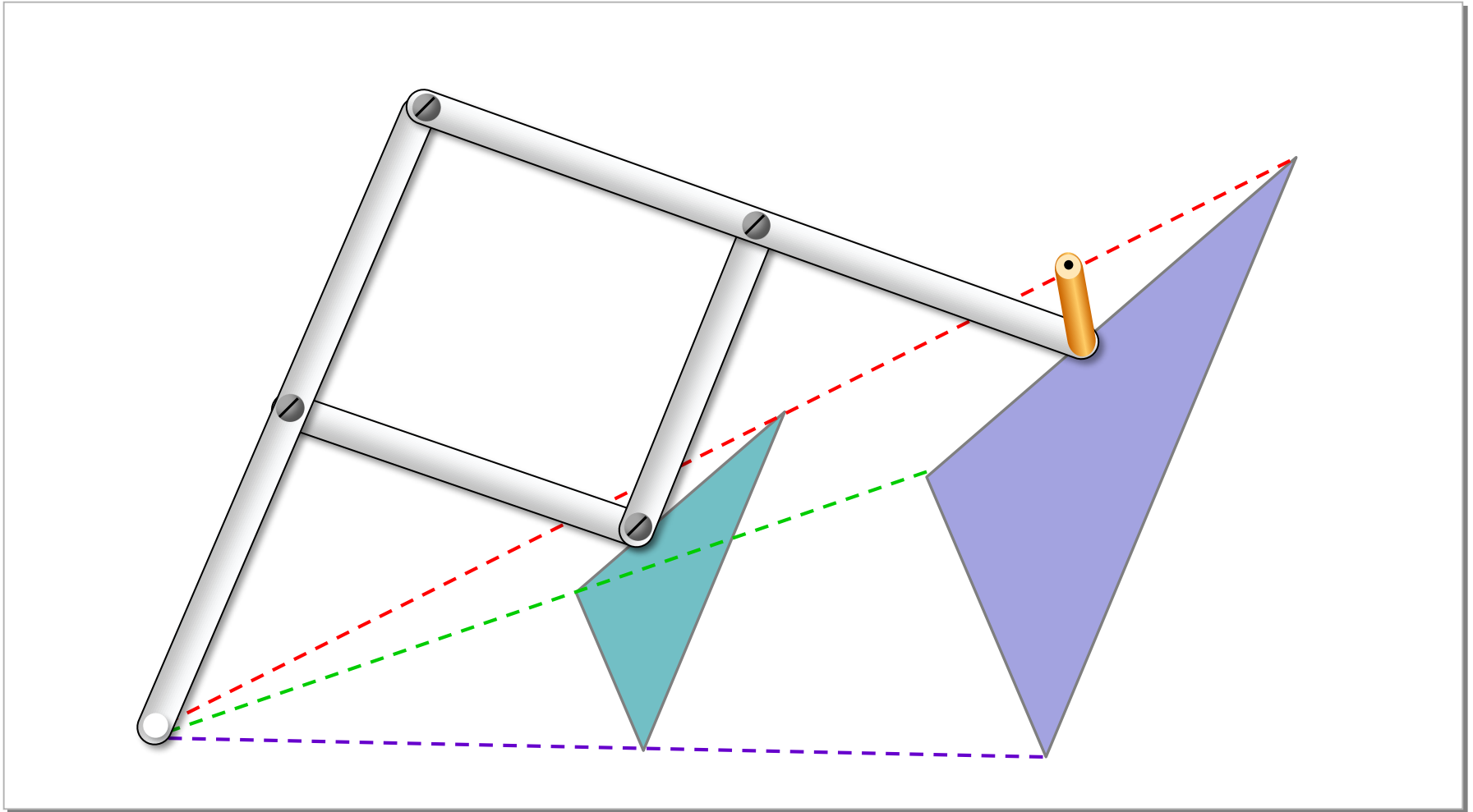
M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches



Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug	Zentrische Streckung	Strahlensätze	Didaktisches
----------	----------------------	---------------	--------------

Phase	Inhalt	Kompetenzen	Anmerkungen
① Motivation			
② Exploration	Erkunden des Geräts inkl. praktischer Übung	pK2 (2): Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen und Geräten entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten	
③ Integration	Funktionsweise des Geräts (Gebrauchsanweisung): Das kann das Gerät, dafür setzt man es ein!	pK5 (1): (mathematische) Einsichten [...] schriftlich dokumentieren oder mündlich darstellen und erläutern	Unterstützung durch Simulation; MINT-Vertiefung: Veränderungen am Gerät
④ Argumentation	Erkunden einer Streckungsfigur, auch durch Messen; inhaltliches Ziel: Eigenschaften der zentrischen Streckung erarbeiten	pK1 (3): bei der Entwicklung und Prüfung von Vermutungen Hilfsmittel verwenden (zum Beispiel Taschenrechner, Computerprogramme) pK2 (3): durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur [...]) das Problem durchdringen pK2 (5): durch Untersuchung von Beispielen [...] zu Vermutungen kommen	Unterstützung durch Simulation
⑤ Fundamentatation	Festhalten des Satzes von der Zentrischen Streckung		siehe Tafelbild
⑥ Examination	Vertiefung durch Übung		praktisch; geometrisch

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

• S, P und T' liegen auf einer Geraden.


• Entsprechende Seiten von Urbild und Bild liegen parallel zueinander

$AB \parallel A'B'$
 $AC \parallel A'C'$
 $BC \parallel B'C'$

• Die Winkelgrößen bleiben durch die Abbildung unverändert
 $(\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B', \dots)$

$$\frac{SA}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = k$$

Definition für Ähnlichkeit



• Die Strecken-/Seitenlängenverhältnisse in Urbild und Bild bleiben gleich.
 $(\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, \dots)$

$k = \text{Streckfaktor}, k > 0$
 (hier: $\sim 1,5$)

$0 < k < 1$: Verkleinerung
 $k > 1$: Vergrößerung

Problemlösung:
 Flächeninhalt

Eine Verdopplung der Seitenlänge bewirkt ein Vervielfachen des Flächeninhalts

Eine Verdreifung der Seitenlänge bewirkt eine Verneunfachung des Flächeninhalts

Zentrische Streckung
 mit Streckzentrum S und Streckfaktor k

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug


Zentrische Streckung

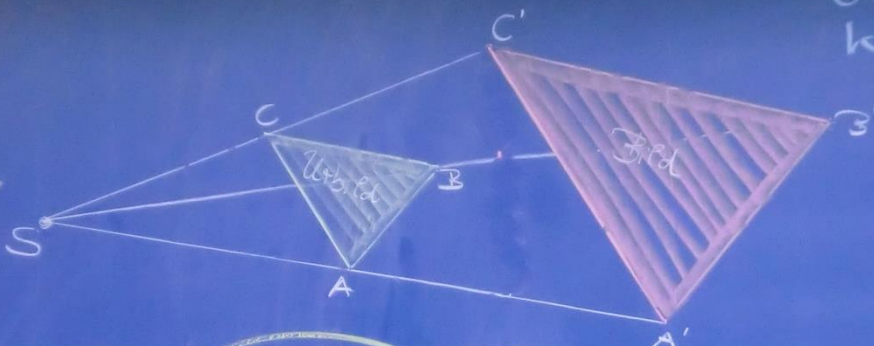
Strahlensätze

Didaktisches


$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}} = k$$

$k = \text{Streckfaktor}, k > 0$
 (hier: $\sim 1,8$)
 $0 < k < 1$: Verkleinerung
 $k > 1$: Vergrößerung

Definition für Ähnlichkeit 



Die Strecken- / Seitenlängenverhältnisse in Urbild und Bild bleiben gleich.
 $\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \mid \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \mid \dots \right)$

Problematisierung
 Flächeneinhalt

 Eine Verdopplung der Seiten bewirkt ein Vierfachen der Fläche.

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches


- S, P und T' liegen auf einer Geraden.
- Entsprechende Seiten vom Urbild und Bild liegen parallel zueinander
 $(AB \parallel A'B',$
 $AC \parallel A'C',$
 $BC \parallel B'C')$
- Die Winkelgrößen bleiben durch die Abbildung unverändert
 $(\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B', \dots)$

Zentrische Streckung

mit Streckzentrum S und Streckfaktor k

Streckung:

Streckungslänge
 e Verühr-
 Flächeninhalts



Eine Verdrufachung der Seitenlänge bewirkt eine Verdreifachung des Flächeninhalts

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze


Didaktisches

Betrachten ähnliche Dreiecke
 $\triangle SAB$ und $\triangle SA'B'$:

$$\Rightarrow \frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{A'B'}} \quad | : \overline{SA'} \cdot \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$$

 Der Flächeninhalt des Bildes
ist k^2 -mal so groß wie
der Flächeninhalt des Urbildes.

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

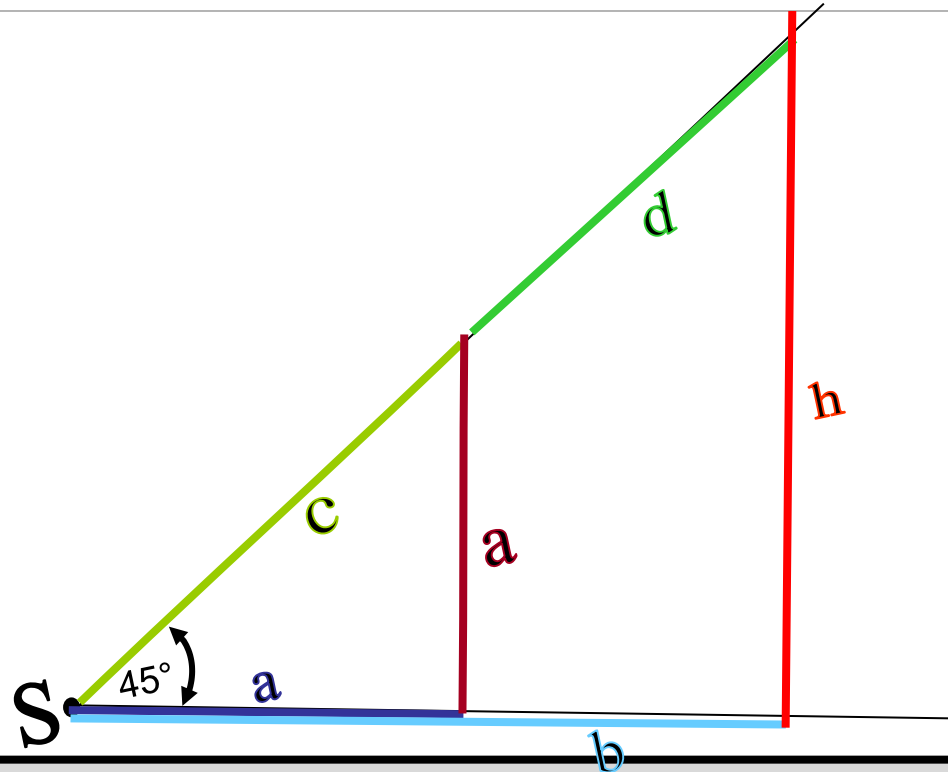
Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Spezialfall II

2. Strahlensatz,
Annäherung I:



$$\begin{aligned} h &= k \cdot a \\ b &= k \cdot a \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{Da } a = a, \text{ folgt: } h = b$$

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

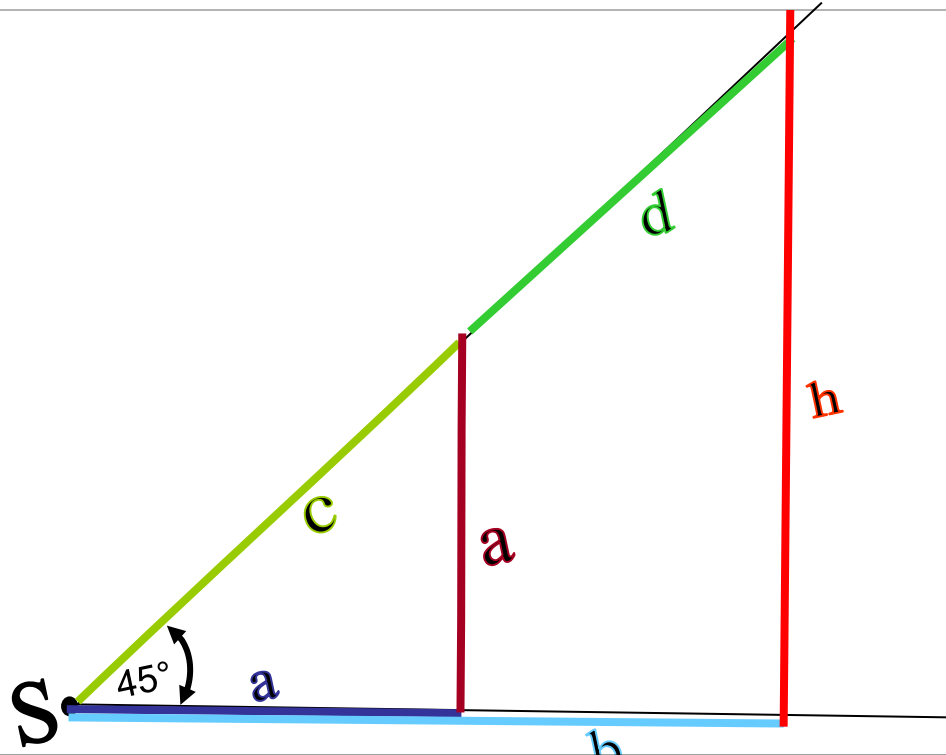
Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Spezialfall II

2. Strahlensatz,
Annäherung II:



$$k = \frac{h}{a}, k = \frac{b}{a} \longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{h}{a}$$

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

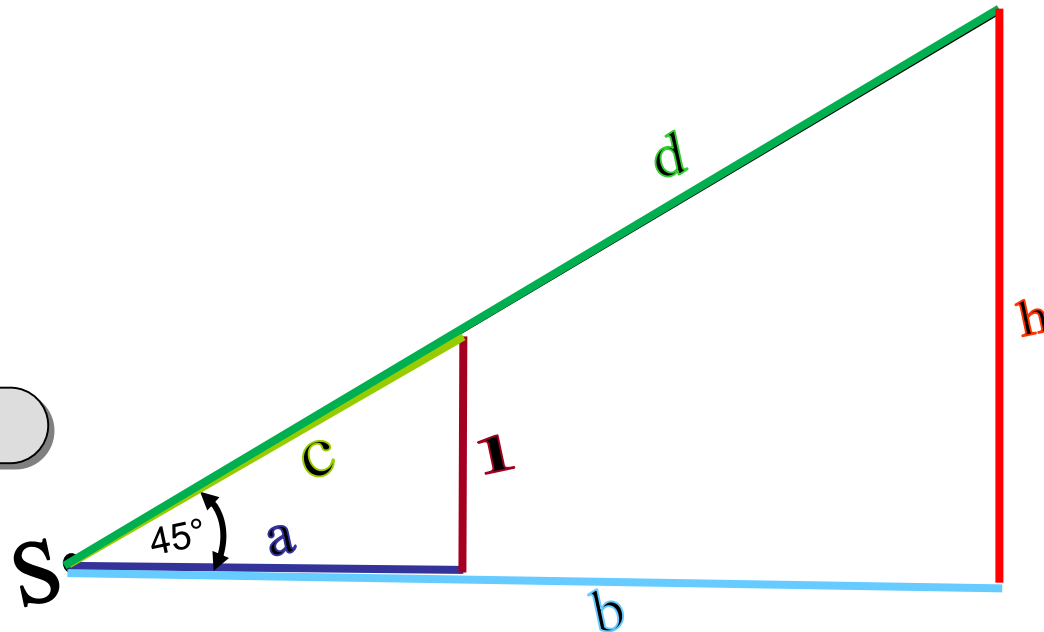
Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Verallgemeinerung

2. Strahlensatz:



$$k = \frac{h}{l}, k = \frac{b}{a} \longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{h}{l}$$

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

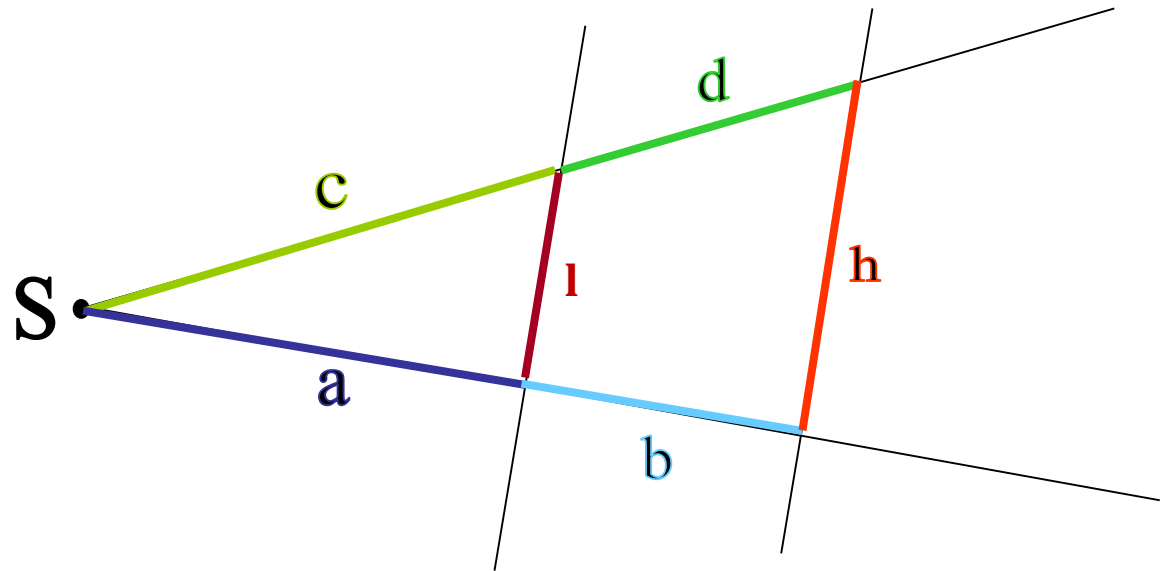
BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Verallgemeinerung



2. Strahlensatz:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{h}{l} = \frac{c + d}{c}$$

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

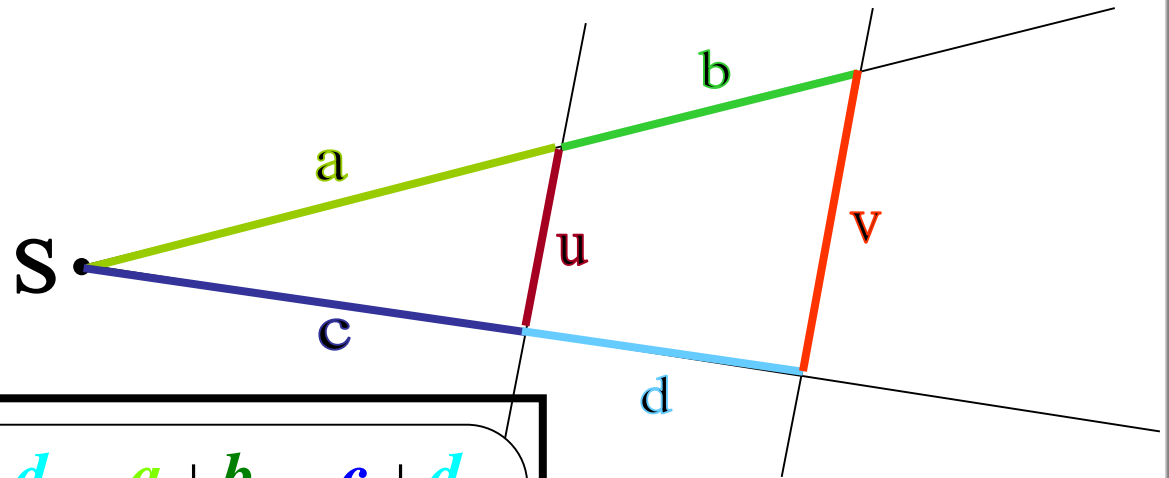
M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches



1. Strahlensatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}; \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

2. Strahlensatz:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{v}{u} = \frac{c+d}{c}$$

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug	Zentrische Streckung	Strahlensätze	Didaktisches
----------	----------------------	---------------	--------------

Phase	Inhalt	Kompetenzen	Anmerkungen
① Motivation	Historische Einbettung		Video (Schüler-GFS)
② Exploration	Erkunden des Geräts; SuS sollen Gebrauchsanweisung schreiben	pK2 (2): Informationen aus den gegebenen Texten, Bildern und Diagrammen und Geräten entnehmen und auf ihre Bedeutung für die Problemlösung bewerten	Unterrichtliche Option: SuS basteln Försterdreieck als (langfristige) Hausaufgabe
③ Integration	Funktionsweise des Geräts (Gebrauchsanweisung): Das kann das Gerät, dafür setzt man es ein!	pK5 (1): (mathematische) Einsichten [...]schriftlich dokumentieren oder mündlich darstellen und erläutern pK1 (3): bei der Entwicklung und Prüfung von Vermutungen Hilfsmittel verwenden (zum Beispiel Simulation, Skizze)	Unterstützung durch Simulation, Unterstützung durch Skizze (heuristisches Hilfsmittel)
④a) Argumentation I	Erkunden einer Messfigur; inhaltliches Ziel: Höhenmessung auf Basis der zentrischen Streckung verstehen und erklären	pK1 (3): bei der Entwicklung und Prüfung von Vermutungen Hilfsmittel verwenden pK2 (3): durch Verwendung verschiedener Darstellungen (informative Figur [...]) das Problem durchdringen oder umformulieren pK2 (5): durch Untersuchung von Beispielen [...] zu Vermutungen kommen und diese auf Plausibilität überprüfen	Unterstützung durch Simulation, Unterstützung durch Skizze (heuristisches Hilfsmittel)
④b) Argumentation II	Ableitung des 2. Strahlensatzes	pK2 (7): mit formalen Rechenstrategien (unter anderem Äquivalenzumformung von Gleichungen [...]) Probleme auf algebraischer Ebene bearbeiten	
⑤ Fundamentatation	Festhalten des 2. Strahlensatzes		
⑥ Examinatation	Herleitung des 1. Strahlensatzes		

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

E
N
T
D
E
C
K
E
N
D
E
S

L
E
R
N
E
N

= eine vom Lehrer vorstrukturierte Lernsituation, die den SuS Gelegenheiten zur Realisierung von **Prozesszielen des Entdeckens** geben soll, wie:

- ➔ Beispiele generieren und Vermutungen äußern,
- ➔ Vermutungen an Beispielen überprüfen,
- ➔ Argumentieren und Beweisen
- ➔ Fallunterscheidungen durchführen,
- ➔ Generalisieren und Analogisieren.

Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

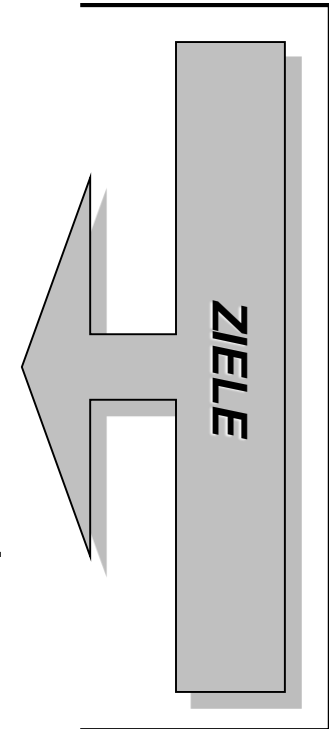
Didaktisches

E
N
T
D
E
C
K
E
N
D
E
S

L
E
R
N
E
N

Durch **Entdeckendes Lernen**...

- ... soll ein bestimmtes **Inhaltsziel erreicht** werden, z.B. die Kenntnis eines bestimmten Satzes und die Einsicht seiner Allgemeingültigkeit.
- ... soll der Unterricht einen Beitrag zu **Prozesszielen** leisten, indem er den Schülern Möglichkeiten zu vielfältigen Aktivitäten bietet.
- ... soll **Interesse, Motivation** sowie **Kreativität** geweckt und gefördert werden



Problemlösen in Unterrichtseinstiegsphasen

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Vernetzung

Vernetzung
von
iKs und pKs

Vernetzung von Inhalten:

- ◄ Zentrische Streckung
- ◄ Strahlensätze
- ◄ Verhältnismäßigkeiten

Vernetzung von
Medien:

- ◄ Simulationen
- ◄ Videosequenzen
- ◄ Arbeitsblätter
- ◄ Geräte

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M









BP-Bezug

Zentrische Streckung

Strahlensätze

Didaktisches

Literatur

-  Altena, K. u.a.: **Theo und die andern**, MUED Verlag.
-  Denke, V./ Segelken, S.: **Wie die alten Seefahrer ihren Weg fanden**, in: Matthias Ludwig (Hrsg.): Projekte im math.-nat. Unterricht, Franzbecker, Hildesheim 1999.
-  Kroepl, B.: **Gewollte Vermessung**, in: Mathematik lehren 89 (1998), S. 68 - 69.
-  Ludwig, M./ Heidenreich, M.: **Vermessung eines Sees**, Berichte über Mathematik und Unterricht, herausgegeben von U. Kirchgraber, ETH- Zürich.
-  Regal, W.: **Daumensprung und Jakobsstab. Messen ohne Maßband**, Conrad Stein, Welter, 2000.
-  Vollath, E. : **Geometrie im Gelände**, Auer, Donauwörth, 1989.
-  Vollrath, H.-J. (Hrsg.): **Praktische Geometrie**, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1984.
-  Ludwig, M.: **Geometrie beim Wort genommen**, in: Die Erde vermessen. Mathematik lehren 124 (2004).