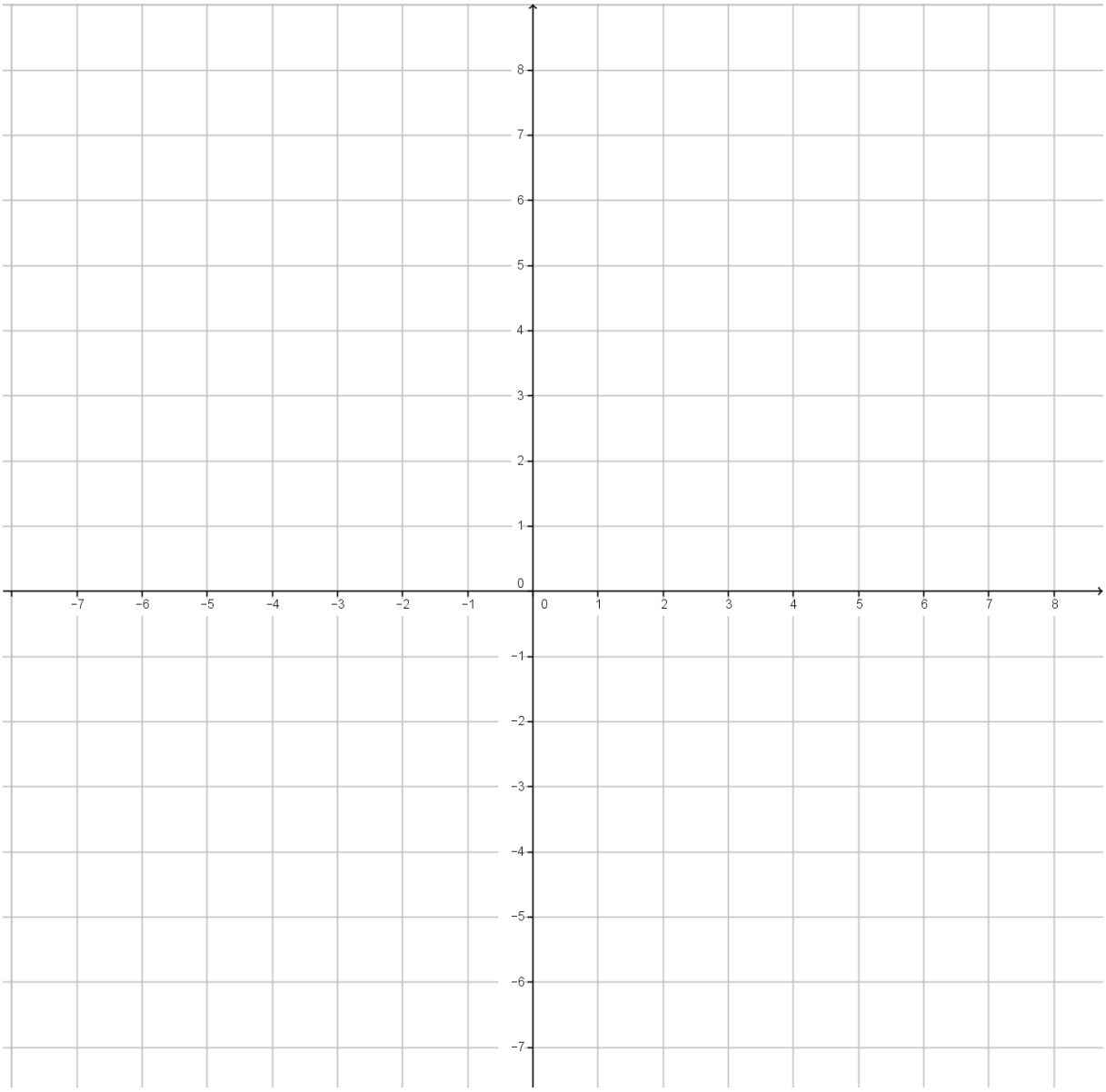
Wo liegt der Scheitel? – Teil I

Die beiden quadratischen Funktionen f und g sind gegeben durch f: $y = x^2 - 2$ und g: $y = (x - 1)^2$. Zeichne die beiden zugehörigen Parabeln (ohne Wertetabelle) in das Koordinatensystem und gib die Koordinaten des Scheitels an.
Eine dritte quadratische Funktion h ist gegeben durch h: $y = (x - 1)^2 - 2$. Markus, Lisa und Ralf überlegen gemeinsam. Ralf sagt, dass man hier auf jeden Fall eine Wertetabelle braucht, wenn man die Parabel einzeichnen will. Lisa dagegen behauptet, dass sie sofort sehen kann, wo der Scheitel der Parabel ist. Markus stimmt ihr zu und zeichnet die Parabel in das Koordinatensystem.
Wie gehen Lisa und Markus vor? Erkläre und zeichne dann die Parabel unten ein.

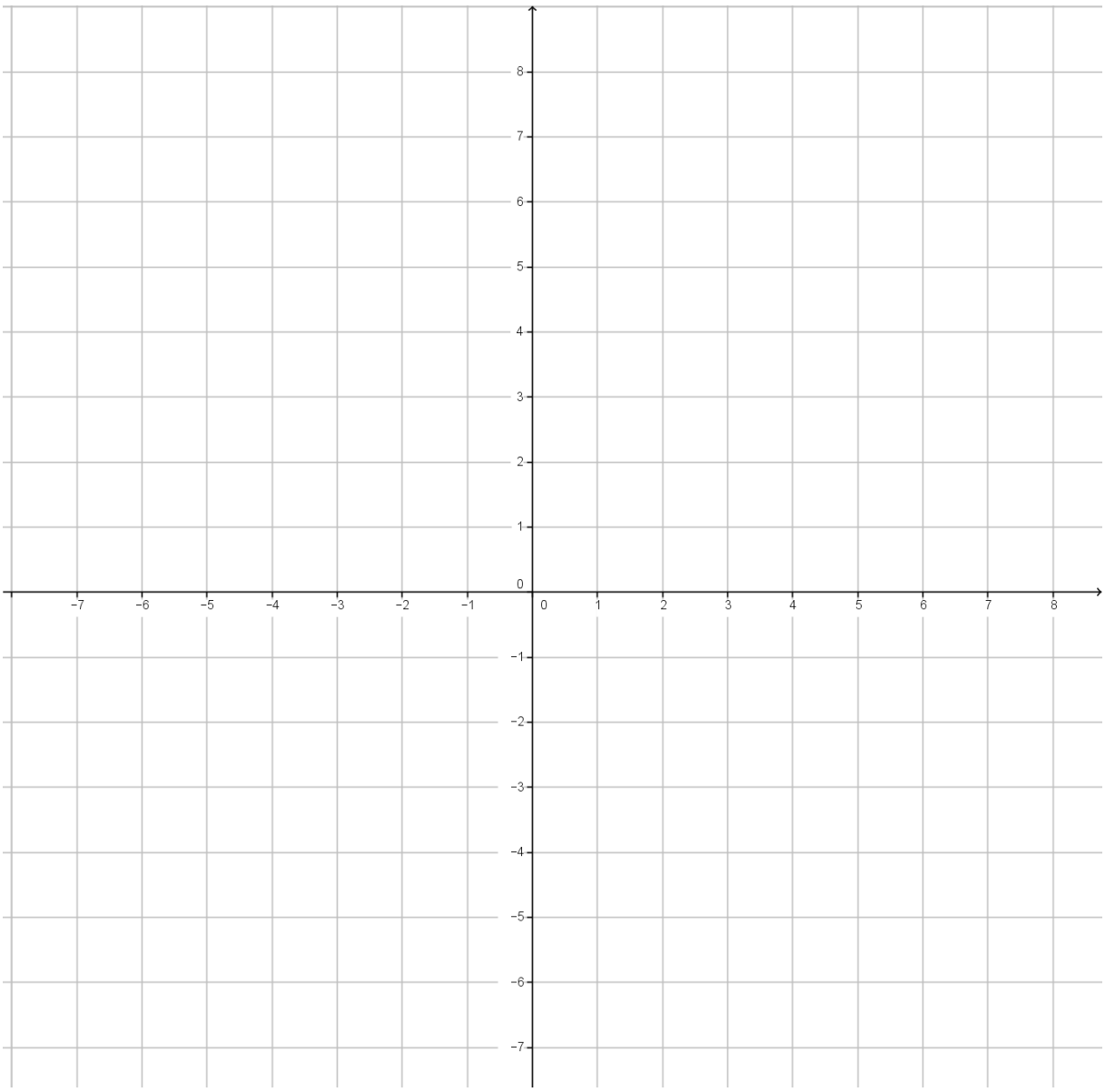
Kontrolliere deine Zeichnung, indem du x-Werte in die Funktionsgleichung einsetzt.



Zeichne die zu den folgenden Funktionsgleichungen gehörenden Parabeln ein und gib die Koordinaten des Scheitels an.

f_1: $y = (x + 2)^2 - 3$ f_2: $y = (x - 2)^2 - 3$ f_3: $y = (x + 2)^2 - 6$ f_4: $y = (x + 3)^2 + 4$

f_5: $y = (x - 3)^2 - 4$ f_6: $y = (x - 1)^2 + 4$ f_7: $y = (x + 6)^2 + 2{,}5$ f_8: $y = (x - 5)^2 + 2{,}5$



Zum Weiterdenken:

Welche der obigen Funktionen besitzen Nullstellen? Findest du eine Regel?

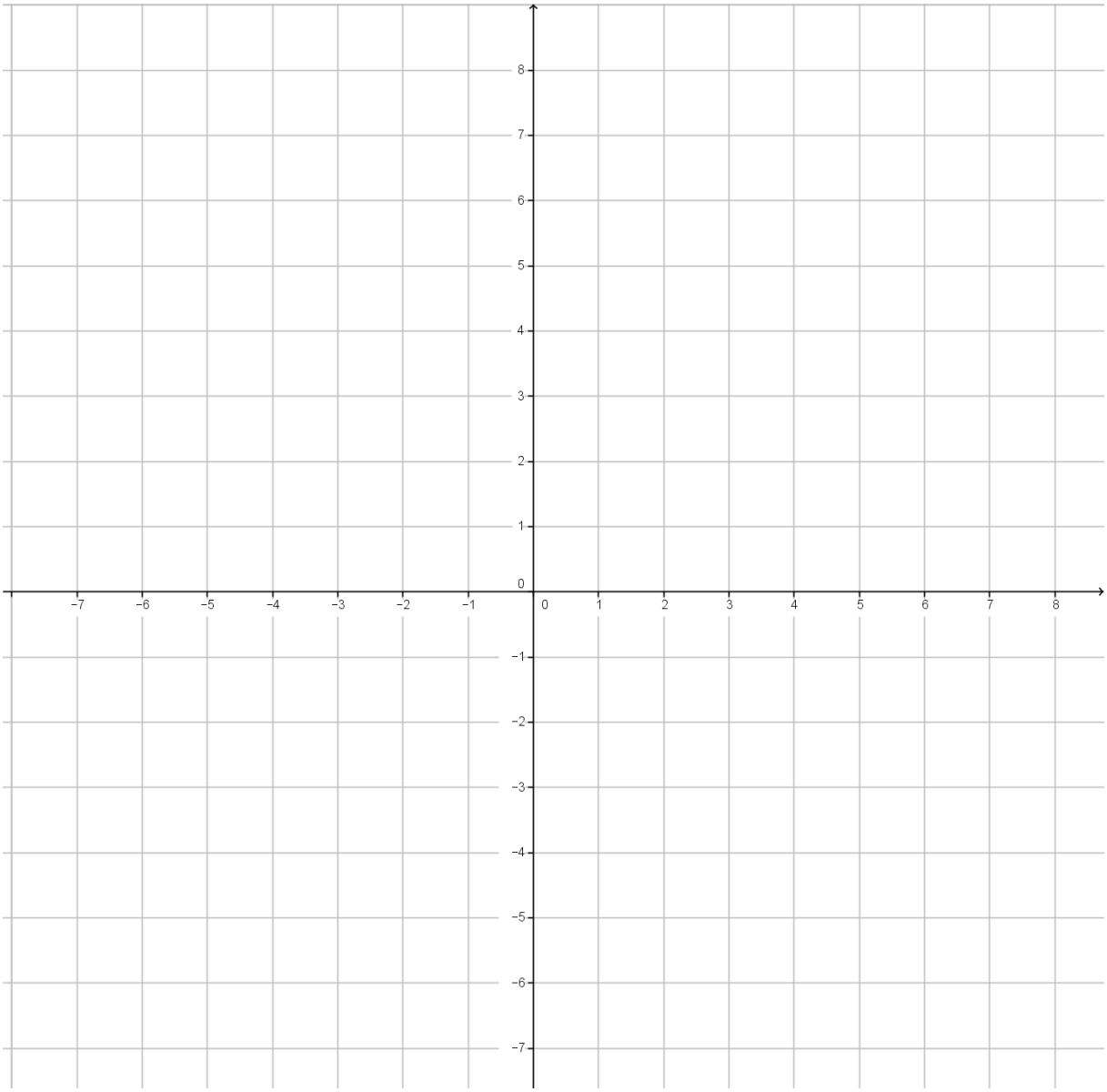
Lies die Nullstellen von f_5 ab. Findest du eine Möglichkeit, diese zu berechnen? Erkläre dein Vorgehen deiner Nachbarin / deinem Nachbarn und testet an folgenden Beispielen:

g: $y = (x + 1)^2 - 9$; h: $y = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$; i: $y = (x + 2{,}5)^2 - 2{,}25$

Überprüft eure Lösungen entweder zeichnerisch oder durch Einsetzen.

Wo liegt der Scheitel? – Teil II

Heute hat Ralf überhaupt keine Lust auf Mathe. Das letzte Mal hatten Markus und Lisa mal wieder die zündende Idee, und gestern Nachmittag hatte ihn seine Mutter auch noch gezwungen, diese Binomischen Formeln zu wiederholen.
Missmutig schaut er auf den Auftrag, den sie in ihrer Gruppe bekommen hatten:
„Eine Funktion f ist gegeben durch f: $y = x^2 + 10x + 25$. Zeichne den zugehörigen Graphen in das Koordinatensystem ein."
Er sieht, dass die beiden eine Wertetabelle ausfüllen. Ralf will gerade auch anfangen, da kommt ihm eine Idee. Er ist plötzlich viel besser gelaunt und ist sogar seiner Mutter dankbar für die Qualen am Vortag. Es dauert keine Minute und er hat ohne Wertetabelle die Parabel gezeichnet.
Wie ist er vorgegangen? Beschreibe und zeichne die Parabel ein.



Weitere Aufträge

Auftrag 1

Wandle mit Ralfs Methode auch die folgenden Parabelgleichungen so um, dass der Scheitel S sofort ablesbar ist. Gib die Koordinaten von S an.

f: $y = x^2 - 6x + 9$ g: $y = x^2 + 18x + 81$ h: $y = x^2 - 2{,}4x + 1{,}44$

i: $y = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ j: $y = x^2 - 0{,}6x + 0{,}09$ k: $y = x^2 + 26x + 169$

Auftrag 2

Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit f: $y = x^2 - 6x + 8$. Vergleiche mit der ersten Funktion aus dem vorigen Auftrag. Warum ist der Funktionsterm nicht direkt umwandelbar?
Lisa überlegt: „Wenn ich statt 8 am Ende 9 stehen hätte, könnte ich umwandeln. Dann habe ich aber eins zu viel und muss es wieder abziehen.“
Die anderen beiden schreiben es auf: f: $y = x^2 - 6x + 9 - 1$
Und jetzt? Kannst du die Parabelgleichung wieder in Scheitelform umwandeln und den Scheitel angeben?

Auftrag 3

Wandle die folgenden Parabelgleichungen in Scheitelform um. Gib die Koordinaten des Scheitels an. Gehe dabei so vor wie in Auftrag 2.

f: $y = x^2 - 8x + 20$ g: $y = x^2 + 20x + 90$ h: $y = x^2 - 14x - 9$

i: $y = x^2 + 3x + 2$ j: $y = x^2 - 0{,}8x + 0{,}36$ k: $y = x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

Auftrag 4

Schreibe eine Anleitung, wie man die so genannte „quadratische Ergänzung“ (Auftrag 2 und 3) durchführt.
Kannst du sie auch ganz allgemein durchführen? Probiere es mit f: $y = x^2 + bx + c$.

Auftrag 5

Suche aus den Aufgaben von Auftrag 1 und 3 die Parabeln aus, die Schnittpunkte mit der x-Achse haben. Begründe kurz deine Wahl und bestimme dann die Nullstellen der Parabelgleichungen. Gehe dazu so vor, wie wir es entdeckt und geübt habt.
Wie könnt ihr eure Ergebnisse überprüfen? Suche mit deiner Tischnachbarin / deinem Tischnachbarn unterschiedliche Möglichkeiten und testet sie an euren Aufgaben.

Auftrag 6 – zum Weiterdenken

Ralf hat Auftrag 5 gelöst und überprüft seine Ergebnisse. Plötzlich schaut er auf und sagt: „Wenn ich die Nullstellen und die Koordinaten des Scheitels weiß, kann ich euch die Scheitelform der Parabel sagen.“ Wie geht er vor?

Auftrag 7 – zum Weiterdenken

Lisa hat mit Auftrag 6 angefangen und merkt sehr schnell, dass sie den Scheitel überhaupt nicht braucht. Sie sagt: „Ich schaffe es auch nur mit den Nullstellen.“ Was hat sie entdeckt?[1]

[1] Hier bietet es sich an, im Anschluss auch die Linearfaktordarstellung mit Hilfe der Nullstellen einzuführen.