Problemlösen am Beispiel des Rückwärtsarbeitens

nach U.Wagner, OHG Tuttlingen

Definition des Problemlösens

G.H. Wheatly:

„Problemlösen ist das, was man tut,
wenn man nicht weiß, was man tun soll.“

Wie überwindet man die anfängliche Hilflosigkeit?

Rückwärtsarbeiten

Problemlösen | Umkehraufgaben | Gleichungen lösen

M A T H E
A Z H
T P T
H G A
E H T A M

Überwindung der anfänglichen Hilflosigkeit

- Vier (drei) Schritte nach Polya („Schule des Denkens“):
  - Verstehen der Aufgabe (verschiedene Darstellungen und Hilfsmittel)

    (BP: Probleme analysieren)
  - Ausdenken eines Plans, Ausführen des Plans

    (BP: **Problemlösestrategien**)
  - Rückschau: Prüfen der Lösung

    (BP: Lösungsprozess reflektieren)
- Dies muss immer wieder spiralcurricular geübt werden!
- Problemlösen als permanentes Unterrichtsprinzip!

Rückwärtsarbeiten

Problemlösestrategien

- Systematisches Probieren
- Zerlegen in Teilprobleme (evtl. Hilfsgrößen und –linien)
- Formale Rechenstrategien (insbes. Äquivalenzumformungen)
- Aufdecken von Regelmäßigkeiten oder math. Mustern
- Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten
- Sonderfälle oder Verallgemeinerungen untersuchen
- Auf Bekanntes zurückführen oder Analogien herstellen
- Zusammenhänge zw. Teilgebieten der Mathematik herstellen

Problemlöseaufgaben

- Problemlöseaufgaben sind das Gegenteil von Routineaufgaben
- Der Problemlösecharakter einer Aufgabe hängt also ab
  - vom Inhalt (unbekannt oder komplex bzw. mehrschrittig),
  - von der genauen Aufgabenstellung (ungewöhnlich oder „offen“),
  - vom Zeitpunkt der Bearbeitung (Erstkontakt?),
  - vom Lernenden (Routine erreicht?).
- Routineaufgaben können zunächst Problemlöseaufgaben sein!
- Viele Problemlöseaufgaben sind später Routine(aufgaben)!

Rückwärtsarbeiten

Problemlösen | Umkehraufgaben | Gleichungen lösen

Problemlöseaufgaben

	Aufgabentyp	Start	Weg	Ziel	Problemlösen?
1	Beispielaufgabe	x	x	x	ungeeignet
2	Geschlossene Aufgabe	x	x	-	ungeeignet
3	Begründungsaufgabe	x	-	x	bedingt geeignet
4	Problemaufgabe	x	-	-	geeignet
5	Offene Situation	-	-	-	geeignet
6	Umkehraufgabe	-	x	x	bedingt geeignet
7	Problemumkehr	-	-	x	geeignet
8	Anwendungssuche	-	x	-	bedingt geeignet

Umkehraufgaben: Einstieg ins Rückwärtsarbeiten

- Rückwärtsrechnen ist wesentlicher Bestandteil der Mathematik und meist (subjektiv) schwieriger („Ventil“):
  - **Unterstufe:** Es ist -7 Grad kalt, aber 5 Grad wärmer als gestern. Wie kalt war es gestern? (Subtraktion als Umkehrung der Addition)
  - **Mittelstufe:** Der quadratische Pool soll einen Flächeninhalt von 60 m^2 haben, wie groß ist seine Seitenlänge? (Wurzelziehen vs. Quadrieren)
  - **Oberstufe:** Die Zuflussrate in einen zunächst leeren Staudamm beträgt nach einem Regen $f(t) = 4 - t^2$ $(f \text{ in } 1000\, m^3, t \text{ in } h)$. Stelle das Stauvolumen in Abhängigkeit von t dar. („Aufleiten“ vs. Ableiten)

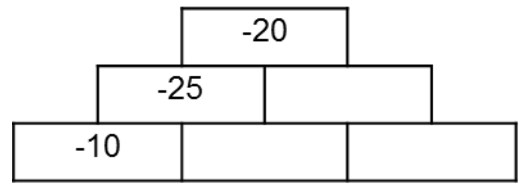
Umkehraufgaben: Einstieg ins Rückwärtsarbeiten

- Beim Erstkontakt (ohne Hinweise) handelt es sich bei diesen einschrittigen Rückwärtsaufgaben bereits um Problem(chen).
- Schon hier können weitere Teilkompetenzen erlernbar sein:
  - **Unterstufe:** durch Darstellungswechsel (Zahlenstrahl, Pfeile) lösbar
  - **Mittelstufe:** durch systematisches Probieren lösbar
  - **Oberstufe:** Probe durch Ableiten verhindert Fehler
- Einstieg ins Problemlösen durch Rückwärtsarbeiten mit Umkehraufgaben sehr einfach und niederschwellig möglich!
- Auch für Isoliertes Üben und Erarbeiten (ZPG III) geeignet!

Rückwärtsarbeiten

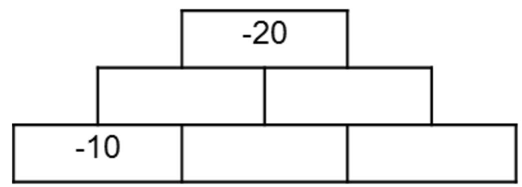
Umkehraufgaben: Einstieg ins Rückwärtsarbeiten

- Problemlösecharakter steigert sich durch
  - Präsentation der Aufgabe:



  - Lösungsvielfalt:

    (evtl. mit Einschränkungen)



Hier kommt es fast automatisch zu einer Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten.

Rückwärtsarbeiten

Problemlösen | Umkehraufgaben | Gleichungen lösen

Umkehraufgaben: Einstieg ins Rückwärtsarbeiten

- Weitere Beispiele (mit und ohne Lösungsvielfalt):

  - von Flächeninhalt auf Seitenlängen schließen,
  - von Mittelwert auf Daten schließen,
  - von Preis mit MwSt auf Preis ohne schließen,
  - von Wahrscheinlichkeit der Binomialverteilung auf Trefferzahl, Anzahl Versuche schließen
  - ...

Rückwärtsarbeiten

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Umkehraufgaben | Gleichungen lösen | Klassiker

Gleichungen lösen: Mehrschrittige Rückwärtsaufgaben

- Auch lineare Gleichungen werden (zunächst) durch Rückwärtsarbeiten gelöst.
- Später kommt durch Vereinfachungsschritte noch das Vorwärtsarbeiten dazu (also auch hier Kombination).
- BP: formale Rechenstrategien (insb. Äquivalenzumformungen)
- Dies ist zunächst ein Problemlöseprozess, der nach und nach Routine wird (oder werden sollte).
- Wieder ist Isoliertes Üben und Erarbeiten (ZPG III) geeignet.

Rückwärtsarbeiten

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Umkehraufgaben | Gleichungen lösen | Klassiker

Gleichungen lösen: Vorübungen

- Der Problemlöseprozess beim Gleichung lösen kann z.B. so beginnen:
  - In der Unterstufe werden die Umkehraufgaben etabliert (s.o.).
  - Dann werden einfache Suchaufgaben (z.B. $3 \cdot ⍟ = 15$) durch Umkehraufgaben und/oder systematisches Probieren gelöst.
  - Geeignete Vorübungen für die Äquivalenzumformungen sind das „Zahlen verstecken“ (Zahlenbuch), Rätselaufgaben und das Waagemodell.

Rückwärtsarbeiten

Umkehraufgaben | Gleichungen lösen | Klassiker

Gleichungen lösen: Vorübungen

- „Zahlen verstecken“: schüleraktiv!

$$26 = 2 \cdot 13 = 2 \cdot (5 + 8) = 2 \cdot (5 + 4 \cdot 2)$$

- „x verstecken“: $\mathrm{x} = 12$

$$2 \cdot x = 24 \quad \text{(verdoppeln)}$$

$$2 \cdot x + 6 = 30 \quad \text{(um 6 vergrößern)}$$

$$2 \cdot (x + 3) = 30 \quad \text{(ausklammern)}$$

$$2 \cdot (x + 3) + 7 = 37 \quad \text{(um 7 vergrößern)}$$

Gleichungen lösen: Vorübungen

- Rätselaufgaben:

  Denke dir eine Zahl, subtrahiere 2, multipliziere das

  Ergebnis mit 5 und addiere schließlich 10.

  Nenne das Ergebnis und ich weiß deine Zahl.

- (Balken-)Waagemodell:

  Gleichheitszeichen entspricht Gleichgewicht!

  siehe alle gängigen Bücher

Gleichungen lösen: Äquivalenzumformungen

- Das Prinzip des Rückwärtsarbeitens muss gegenwärtig sein:
  Statt „KlaPuStri“ wird hier (zunächst) „StriPuKla“ gerechnet!
- Das Vereinfachen muss als Vorwärtsarbeiten kontrastiert werden.
- Es muss zwischen Richtigkeit und Nützlichkeit der Umformung unterschieden werden (z.B. „Gewinn- und Verlustumformung“).
- Die „beste“ Umformung zu finden ist dann wieder Problemlösen:

  $7+3x=5x-9$ lässt vier verschiedene Gewinnumformungen zu

  (zwei davon sind etwas „besser“ als die beiden anderen)

Gleichungen lösen: quadratisch (und höhergradig)

- Nur bei rein-quadratischen ist das erlernte Prinzip der Äquivalenz-umformung zielführend: Umstellen bis zum Wurzelziehen
- Aber: In anderen Fällen „Zurückführen“ (auch als Rückwärtsarbeiten deutbar!) auf einfacheren Fall möglich:

  Ausklammern der Variablen

  Substitution

  allgemeine quadratische Gleichung durch quadratische Ergänzung (als Binnendifferenzierung?!)

Klassiker: Die sieben Tore

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele hatte er am Anfang?

Rückwärts: 1+1+2=4; 4+1+5=10; 10+1+11=22; 22+1+23=46;

46+1+47=94; 94+1+95=190; 190+1+191=382

Klassiker: Der Teufel und der alte Mann

Der Teufel sagte zu einem armen Manne: „Wenn du über diese Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln, doch musst du jedes Mal, wenn du zurückkommst, 8 Taler für mich ins Wasser werfen.”
Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Heller mehr. Wie viel hatte er anfangs?

Rückwärts: 0+8=8; 8:2=4; 4+8=12; 12:2=6; 6+8=14; 14:2=7;

Klassiker: Telefonanschlüsse

Wie viele Telefonanschlüsse sind im Ort vorhanden, wenn 319600 gegenseitige Gesprächsverbindungen möglich sind?

(Wie viele nicht-parallele Geraden haben 3160 Schnittpunkte?)

Rückwärts: es sind n Anschlüsse, jeder ermöglicht n-1 Verbindungen

Variante 1: Es gibt also $n\cdot(n-1):2$ Verbindungen (zunächst doppelt gez.)

Variante 2: $(n-1)+(n-2)+\ldots+1= n\cdot(n-1):2$ (Gauß-Formel)

Insgesamt also 800 Telefonanschlüsse (80 Geraden)

Rückwärtsarbeiten

Klassiker: Tennisturnier, Eimeraufgabe

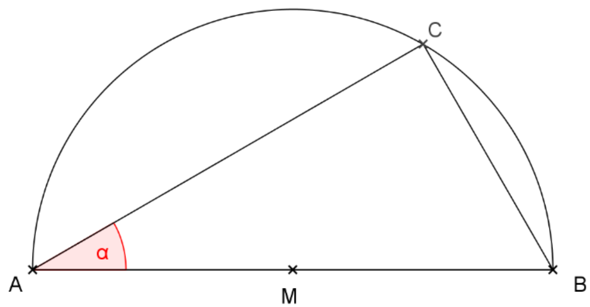
- 128 Tennis-Spieler treten im k.o.-System an, wie viele Spiele?
  - Vorwärts: 64+32+16+8+4+2+1
  - Rückwärts: einer bleibt übrig, 127 scheiden in 127 Spielen aus
- Wie kann man vom Fluss genau 6 Liter holen, wenn man nur einen 4-Liter-Eimer und einen 9-Liter-Eimer zum Messen hat?
  - Rückwärts: 0|6 dann 4|6 dann 1|9 dann 1|0 dann 0|1 dann 4|1 dann 0|5 dann 4|5 dann 0|9
  - Wieder kombiniertes Rückwärts- und Vorwärtsarbeiten sinnvoll!

Rückwärtsarbeiten

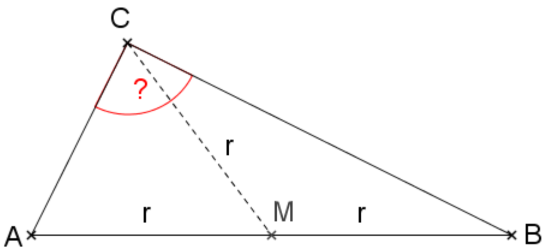
Klassiker | Geometrie | Fazit

Geometrie: Vorwärtsarbeiten

- Welche Sätze haben passende Voraussetzungen? (ggf. sind Hilfslinien notwendig)



- Welche Behauptungen kann ich damit beweisen?
- Bsp: Wenn $\alpha = 30^{\circ}$, dann ist Strecke BC halb so lang wie Strecke AB.

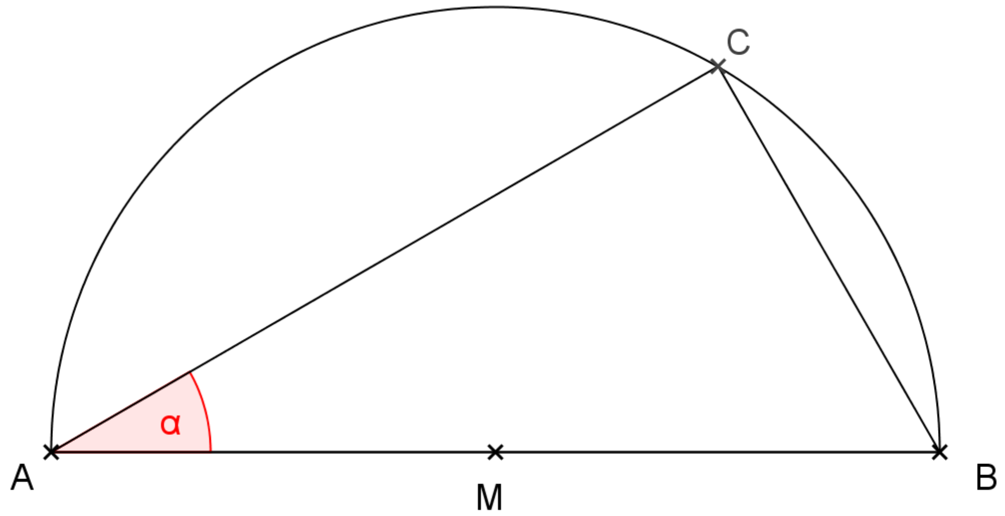


- Vorübung für Satz des Thales

Geometrie: Begründungsbasis (ZPG II)

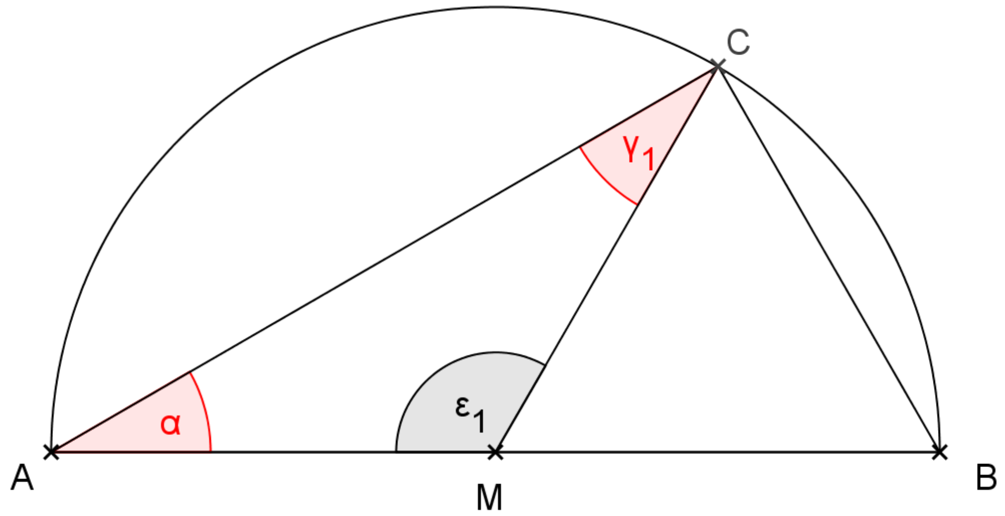
Schluss auf gleiche Streckenlängen Achsen- oder Punktsymmetrie Satz v. gleichschenkligen Dreieck Satz von der Mittelsenkrechten Satz vom Parallelogramm Kongruenzsätze $\Rightarrow a = b$	**Schluss auf gleiche Winkelweiten** Achsen- oder Punktsymmetrie Satz v. gleichschenkligen Dreieck Stufenwinkelsatz Wechselwinkelsatz Satz v. Parallelogramm Kongruenzsätze $\Rightarrow \alpha = \beta$
Schluss auf Parallelität Punktsymmetrie Stufenwinkelsatz Wechselwinkelsatz Satz v. Parallelogramm Strahlensatz I (Umkehrung) Satz v.d. zentrischen Streckung $\Rightarrow g \parallel h$	**Schluss auf gleiche Streckenverhältnisse** Strahlensätze Satz v.d. zentrischen Streckung Ähnlichkeitssätze für Dreiecke $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

Geometrie: Vorwärtsarbeiten



Begründe: Wenn $\alpha = 30°$, dann ist $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$

Geometrie: Vorwärtsarbeiten

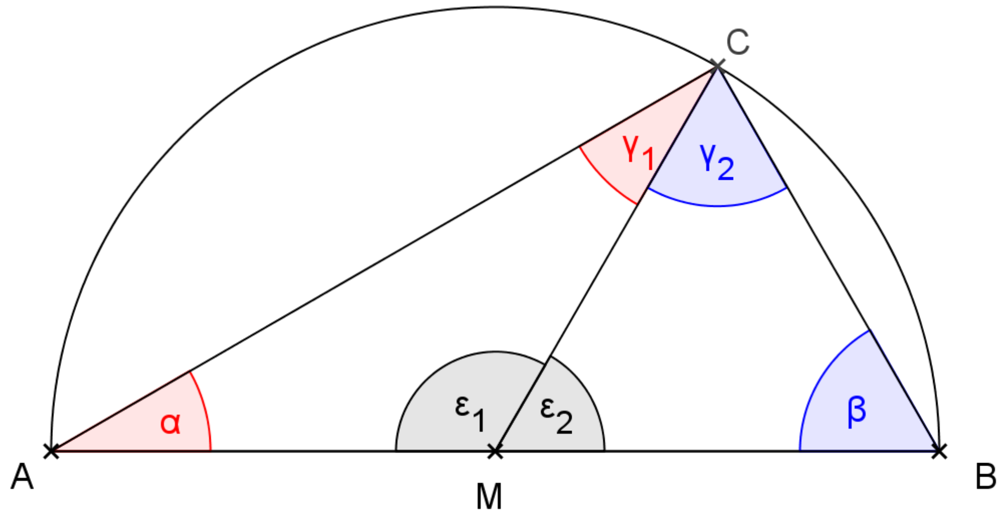


Hilfslinie ermöglicht Erkenntnisse:

Basiswinkelsatz: $\alpha = \gamma_1 = 30°$

Winkelsumme: $\varepsilon_1 = 120°$

Geometrie: Vorwärtsarbeiten



Nebenwinkel: $\varepsilon_2 = 60°$

Basiswinkelsatz: $\gamma_2 = \beta$

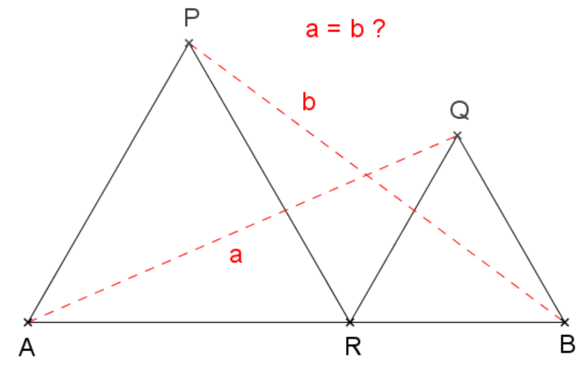
Winkelsumme: $\varepsilon_2 = \gamma_2 = 60°$

Basiswinkel: |BM|=|BC|

Rückwärtsarbeiten

Geometrie: Rückwärtsarbeiten

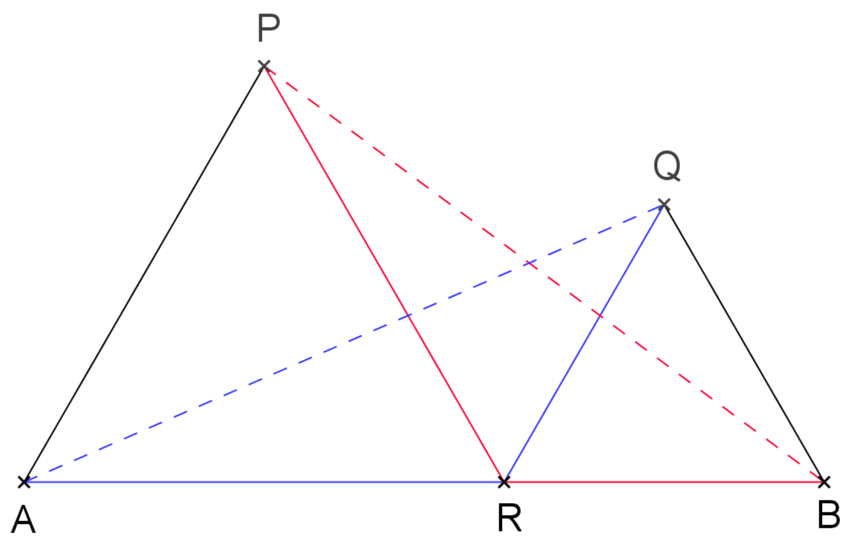
- Welche Sätze haben passende Behauptungen?
- Welche Voraussetzungen muss ich dazu nachweisen? (ggf. sind Hilfslinien notwendig)
- Bsp: Zwei gleichseitige Dreiecke auf AB, sind Verbindungsstrecken AQ und BP gleich lang?



Schluss auf gleiche Streckenlängen

$$\left.\begin{array}{l}\text{Achsen- oder Punktsymmetrie}\\ \text{Satz v. gleichschenkligen Dreieck}\\ \text{Satz von der Mittelsenkrechten}\\ \text{Satz vom Parallelogramm}\\ \text{Kongruenzsätze}\end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

Geometrie: Rückwärtsarbeiten

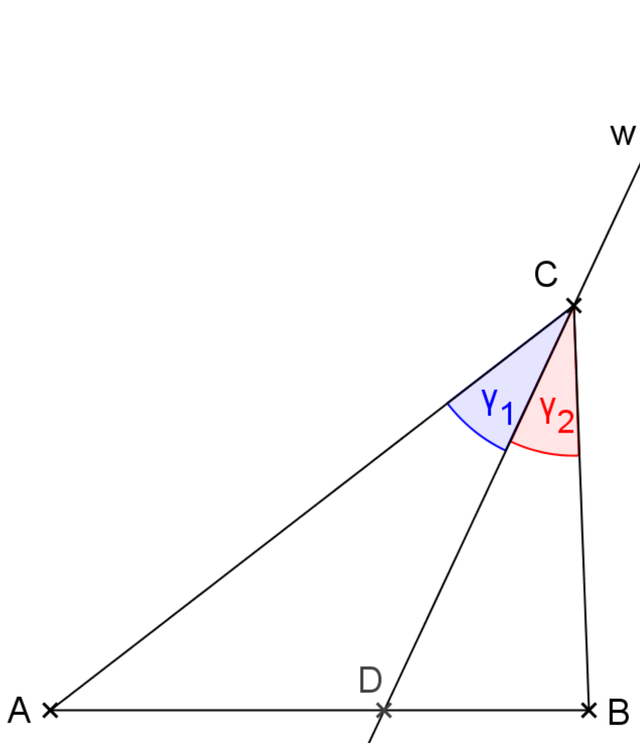


Rückwärts:
Sind Dreiecke AQR und BPR kongruent?

Suche gleiche Seitenlängen und Winkelweiten:

Gleichseitigkeit: $|QR|=|BR|$
Gleichseitigkeit: $|AR|=|PR|$
Eingeschlossener Winkel ist jeweils Nebenwinkel von 60° also 120° weit
Nach sws sind Dreiecke kongruent

Geometrie: Kombiniertes Rückwärts- und Vorwärtsarbeiten

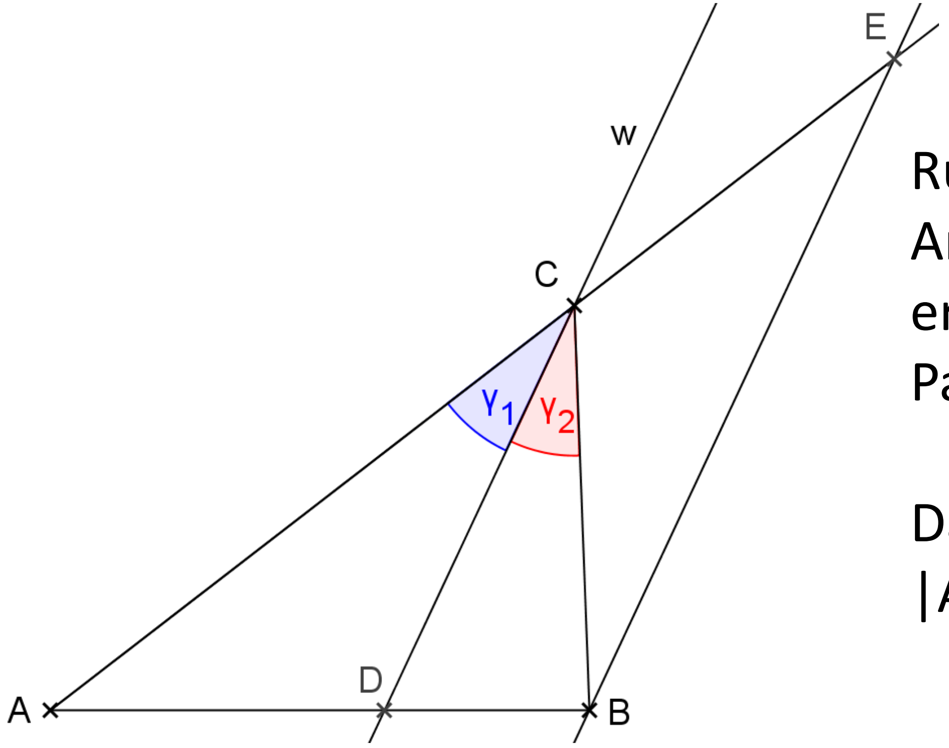


Beweise: In jedem Dreieck zerlegt die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Zu zeigen:

$|AD|:|DB|=|CA|:|CB|$

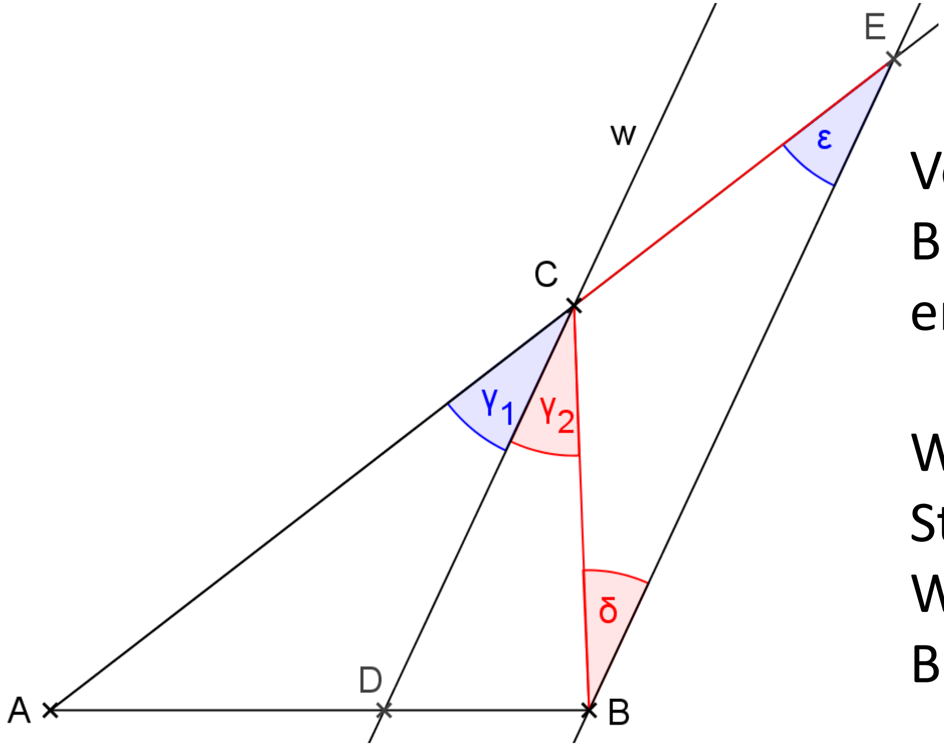
Geometrie: Kombiniertes Rückwärts- und Vorwärtsarbeiten



Rückwärts:
Anwendung des Strahlensatzes erfordert Hilfslinie:
Parallele zu w durch B.

Dann gilt:
$|AD|:|DB|=|CA|:|CE|$

Geometrie: Kombiniertes Rückwärts- und Vorwärtsarbeiten



Vorwärts:
Begründung, dass |CE|=|CB| erfordert

Wechselwinkelsatz: $\gamma_2 = \delta$
Stufenwinkelsatz: $\gamma_1 = \varepsilon$
Winkelhalbierung: $\delta = \varepsilon$
Basiswinkelsatz: |CE|=|CB|

Insgesamt:
|AD|:|DB|=|CA|:|CB|

Rückwärtsarbeiten

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Geometrie | Fazit | Quellen

- Um Problemlösen zu lernen muss man Probleme lösen.
- Problemlösestrategien sind erlernbar, dazu ist ein Bewusstmachen auf der Metaebene notwendig.
- Spätere Routineaufgaben können Problemlöseaufgaben sein.
- Problemlösen sollte mit kleinen Schritten beginnen, was beim Rückwärtsarbeiten leicht möglich ist.
- Viele Inhalte sind als Rückwärtsarbeiten deut- und schulbar.
- Somit kann die Teilkompetenz Rückwärtsarbeiten als ein roter Faden und Orientierung in der Schulmathematik dienen.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Quellen

- G.Polya, „Schule des Denkens“, Francke Verlag, Tübingen
- Zahlenbuch, Klett und Balmer Verlag, Zug, Schweiz
- R. Bruder, u.a.: diverse Internet-Veröffentlichungen zum Thema „Problemlösen“, u.a. in prolehre.de, math-learning.com
- Materialien und Ideen vorhergehender ZPG-Fortbildungen
- G. Schneider: „Geometrie“, ppt-Datei und Materialien, 2015: hieraus sind die Geometrieprobleme entnommen: Danke!