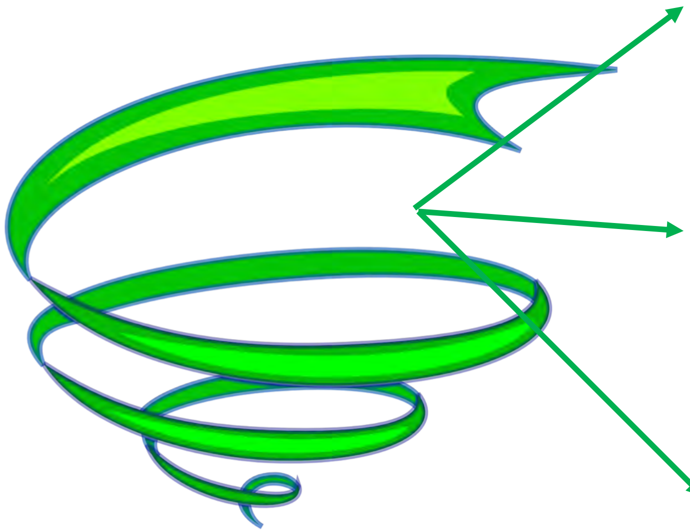
„Mit Binomialverteilungen umgehen“

Klasse 10

S. Göttge-Piller

Binomialverteilung

3.2.5 Leitidee Daten und Zufall



https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

Die Schülerinnen und Schüler können

Daten aus- und bewerten

(1) zu einer statistischen Fragestellung Daten aus Sekundärquellen entnehmen

- P 2.2 Probleme lösen 2, 4
- P 2.5 Kommunizieren 7
- L MB Information und Wissen

(2) die Kenngrößen *unteres* und *oberes Quartil, Median* bestimmen

(3) *Boxplots* erstellen und Verteilungen mithilfe von *Boxplots* interpretieren und vergleichen

- P 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 2, 9
- P 2.5 Kommunizieren 7, 8
- L BO Fachspezifische und handlungsorientierte Zugänge zur Arbeits- und Berufswelt
- L MB Produktion und Präsentation

(4) Aussagen, die auf einer Datenanalyse basieren, formulieren und bewerten

- P 2.5 Kommunizieren 1, 3
- L BTV Personale und gesellschaftliche Vielfalt
- L VB Medien als Einflussfaktoren

(5) die Bedeutung von Wahrscheinlichkeitsaussagen in alltäglichen Situationen erklären

- P 2.5 Kommunizieren 7

(10) die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten (*mögliche* und *günstige Ergebnisse*) in konkreten Situationen durch einfache kombinatorische Überlegungen bestimmen

- P 2.2 Probleme lösen 5
- P 2.3 Modellieren 3

(11) *Wahrscheinlichkeiten* von *Ereignissen* vergleichen und insbesondere bei Laplace-Experimenten bestimmen

(12) *Wahrscheinlichkeiten* unter Verwendung des *Gegenereignisses* berechnen

(13) *Baumdiagramme* zur Darstellung *mehrstufiger Zufallsexperimente* erstellen

- P 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 1

(14) *Wahrscheinlichkeiten* bei *mehrstufigen Zufallsexperimenten* mithilfe der *Pfadregeln* (*Produkt-, Summenregel*) bestimmen

Binomialverteilung

3.3.5 Leitidee Daten und Zufall

Bereits bekannte Kenngrößen aus 5 – 8

- Minimum
- Maximum
- Mittelwert (arithmetisch)
- Unteres Quartil
- Oberes Quartil
- Median

Die Schülerinnen und Schüler können
Mit Binomialverteilungen umgehen
(7) die Begriffe *Bernoulli-Experiment* und *Bernoulli-Kette* erläutern und *Bernoulli-Experimente* von anderen Zufallsexperimenten unterscheiden
(8) die *Formel von Bernoulli* und die Bedeutung der *Binomialkoeffizienten* erläutern
(9) Wahrscheinlichkeiten *binomialverteilter Zufallsgrößen* berechnen
(10) *Binomialverteilungen* in *Histogrammen* graphisch darstellen und die Wirkung der Parameter n, p und k beschreiben
P 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 9
(11) die graphische Darstellung einer *Binomialverteilung* interpretieren
P 2.5 Kommunizieren 1, 6
(12) bei *Binomialverteilungen* den jeweils fehlenden Parameter (n, p oder k) mit geeigneten Hilfsmitteln bestimmen
P 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 9
(13) die Kenngrößen *Erwartungswert* und *Standardabweichung* einer *binomialverteilten Zufallsgröße* berechnen und ihren Zusammenhang am *Histogramm* erläutern
P 2.5 Kommunizieren 6

Binomialverteilung

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

Binomialkoeffizient und Kombinatorik

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

Anknüpfend an die Aufgabenstellungen aus Klasse 7/8 kann hier mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen das Verständnis für den Binomialkoeffizienten gestärkt werden

Je nach Aufgabenstellung gilt es die folgenden Aspekte zu berücksichtigen:

- mit/ohne Reihenfolge
- mit/ohne Wiederholung

Zusammenfassung Kombinatorik

Binomialverteilung

Kombinatorik Vorgaben der Bildungsstandards

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

<u>KMK-Standards MSA</u>
3.2 (L 1): Die Schülerinnen und Schüler führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen.

Interpretation KMK-Standards durch IQB-Aufgaben:
Die unten genannten Inhalte bzw. Kompetenzen werden in der IQB-Aufgabengruppe als selbstverständlich verfügbar angesehen, und das sogar auf grundlegendem Niveau.

<u>BW-BP 2016</u>
3.2.5 (10)... die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten (*mögliche* und *günstige* Ergebnisse) in konkreten Situationen durch einfache [!] kombinatorische Überlegungen bestimmen.

Binomialverteilung

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

MATHE ZPG

Einfache kombinatorische Überlegungen

1.	**7/8**	**Produktmengen**	Anzahl Kombinationen aus 3 Suppen, 5 Hauptgängen, 4 Desserts	$3 \cdot 5 \cdot 4$
2.		**Permutationen** (Spezialfall von 3.)	Anzahl möglicher Anordnungen von 11 Objekten	$11!$
3.		**Ziehen ohne Zurücklegen** mit Beachtung der Reihenfolge	Ziehung 3 aus 11	$11 \cdot 10 \cdot 9$
4.		**Ziehen mit Zurücklegen** mit Beachtung der Reihenfolge (Spezialfall von 1.)	Ziehung 3 aus 11	11^3
5.	**9/10**	**Ziehen ohne Zurücklegen** ohne Beachtung der Reihenfolge	Ziehung 3 aus 11	$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = \binom{11}{3}$

Binomialverteilung

Bildungsplan	Fachliches	Unterricht	Fazit

Einfache kombinatorische Überlegungen

6.		**Kombinationen aus obigen Typen**	16 Mädchen, 12 Jungen Anzahl der Möglichkeiten für ...	
	7/8		- Zweiergruppen aus 1 M und 1 J	$16 \cdot 12$
	9/10	Einstiegsbeispiel (s. unten)	- Zweiergruppen beliebig	$\binom{28}{2}$
		Zielstufe (WTR)	- Sechsergruppen beliebig	$\binom{28}{6}$
			- Sechsergruppen aus 4 M und 2 J	$\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{2}$

Binomialverteilung

Binomialkoeffizient: ein möglicher Zugang

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

Der Mathematiklehrer bringt Gegenstände mit, mit denen Zufalls-experimente simuliert werden können. Aus 6 verschiedenen „Zufallsgeneratoren“ können Schülerteams jeweils 2 ohne Zurücklegen auswählen. Die Wahlreihenfolge ist egal und persönliche Vorlieben der Teams gibt es nicht.

Wie viele mögliche Zweierkonstellationen hat ein Schülerteam?

Alle Bilder Pixabay August 2017

Binomialverteilung

Binomialkoeffizient und Kombinatorik

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

a) Wie viele mögliche Zweierkonstellationen hat das erste Team?

Das erste Team wählt 2 beliebige Experimente aus den 6 vorhanden aus.

{(Glücksrad – Würfel); (Glücksrad – Münze); (Glücksrad – Karten); (Glücksrad – Reißzwecke); (Glücksrad – Kugeln); (Würfel - Münze); (Würfel - Karten); (Würfel - Reißzwecke); (Würfel - Kugeln); (Münze - Karten); (Münze - Reißzwecke); (Münze - Kugeln); (Karten - Reißzwecke); (Karten - Kugeln); (Reißzwecke – Kugeln)}

Ergibt: 15 mögliche Kombinationen

Alle Bilder Pixabay August 2017

Binomialverteilung

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

Binomialkoeffizient und Kombinatorik

Ein Team wählt 2 beliebige Experimente aus den 6 vorhanden aus.
Dafür hat es zunächst 6 und danach noch 5, also insgesamt $6 \cdot 5$ Möglichkeiten.

Da die Wahlreihenfolge egal ist, gibt es genau halb so viele Möglichkeiten

$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$ Dafür schreibt man auch $\binom{6}{2}$

Binomialkoeffizient und Kombinatorik

Zugehöriges Unterrichtsgespräch könnte folgende Aspekte aufnehmen:

Angenommen, jedes Team würde nur noch ein Experiment bekommen.

- Wie viele Möglichkeiten gäbe es, wenn es 3, 4 oder 10 Experimente zu Auswahl stünden? *(Variation von n)*

Angenommen, jedes Team würde mehr als zwei Experimente bekommen.

- Wie viele Möglichkeiten gäbe es, wenn es dabei nicht auf die Reihenfolge ankommt? *(Variation von k)*

Differenzierung nach oben:

- Gebt eine Gesetzmäßigkeit (Formel) zur Berechnung der Möglichkeiten an – vor allem um die Schreibarbeit zu reduzieren?

Alle Bilder Pixabay August 2017

Binomialverteilung

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

Schülerwissen – Binomialverteilung

- Binomialkoeffizient, gibt die Anzahl der Pfade für genau k Treffer bei *n* Versuchen an

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1} =: \binom{n}{k}$$

(dies sollte für kleine Zahlen unmittelbar einsichtig und ohne WTR, für größere aber auch mit WTR berechnet werden können; eine Formalisierung ist dabei nicht notwendig)

- Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer bei Trefferwahrscheinlichkeit *p*

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

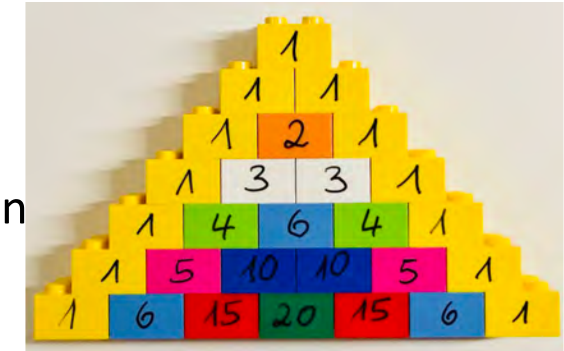
(des Weiteren alle Wahrscheinlichkeitsberechnungen, die sich hieraus ergeben, insbesondere kumulierte Wahrscheinlichkeiten).

Binomialverteilung

Binomialkoeffizient wachsen lassen

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

Im Sinne der Spiralcurricularität könnte man den Binomialkoeffizienten langfristig anvisieren und langsam in den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler verankern bzw. wachsen lassen.



Piller_Maerz_2018

<u>Klasse 5/6: </u> Das Pascal´sche Dreieck

- SuS beschreiben welche Besonderheiten ihnen bei bestimmten Zahlenanordnung auffallen

z.B.: am Rand nur Einser, zweite Schräge: Ziffernfolge, Symmetrie, dritte Schräge: Dreieckszahlen

- SuS versuchen das Dreieck eigenständig fortzuschreiben
- SuS bekommen einen Papierausdruck mit Arbeitsaufträgen

z.B.: färbe alle geraden Zahlen, färbe alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind,

- LSG: alle Zahlen einer Zeile addieren und die Summen miteinander vergleichen

Binomialverteilung

Klasse 8: Präzisierung der kombinatorischen Überlegungen

Nummeriert man im Pascal´schen Dreieck die Zeilen und die jeweiligen, zugehörigen Einträge mit 0 beginnend, so gibt z. B. der 2. Eintrag in der 4. Zeile die Anzahl der Möglichkeiten (hier 6) an, 2 Elemente mit einem Griff aus einer Gruppe mit 4 Elementen zu ziehen.

0. Zeile							1						
1. Zeile						1		1					
2. Zeile					1		2		1				
3. Zeile				1		3		3		1			
4. Zeile			1		4		6		4		1		
5. Zeile		1		5		10		10		5		1	
6. Zeile	1		6		15		20		15		6		1

Piller_Maerz_2018

Oder: Baudiagramm

Es handelt es sich um ein 4-stufiges Experiment mit jeweils 2 Ästen.

(z.B. eine rote und eine weiße Kugel aus einer Urne mit Zurücklegen ziehen)

Bestimmt man die Anzahl der Pfade durch den Baum um genau 2 rote Kugeln zu erhalten, so sind es $6 = \binom{4}{2}$

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

Klasse 8 oder 9 oder 10: Binomischer Lehrsatz
(Verwendung Binomialkoeffizienten)

Die Einträge der n-ten Zeile des Pascal´schen Dreiecks entsprechen den Koeffizienten der „Binome“ $(a \pm b)^n$

z.B.

$$(a-b)^2 = \binom{2}{0} \cdot a^2 - \binom{2}{1} \cdot ab + \binom{2}{2} \cdot b^2$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n$$

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

Ziel der Spirale

Klasse 10: Die Formel von Bernoulli unter Verwendung des Binomialkoeffizienten

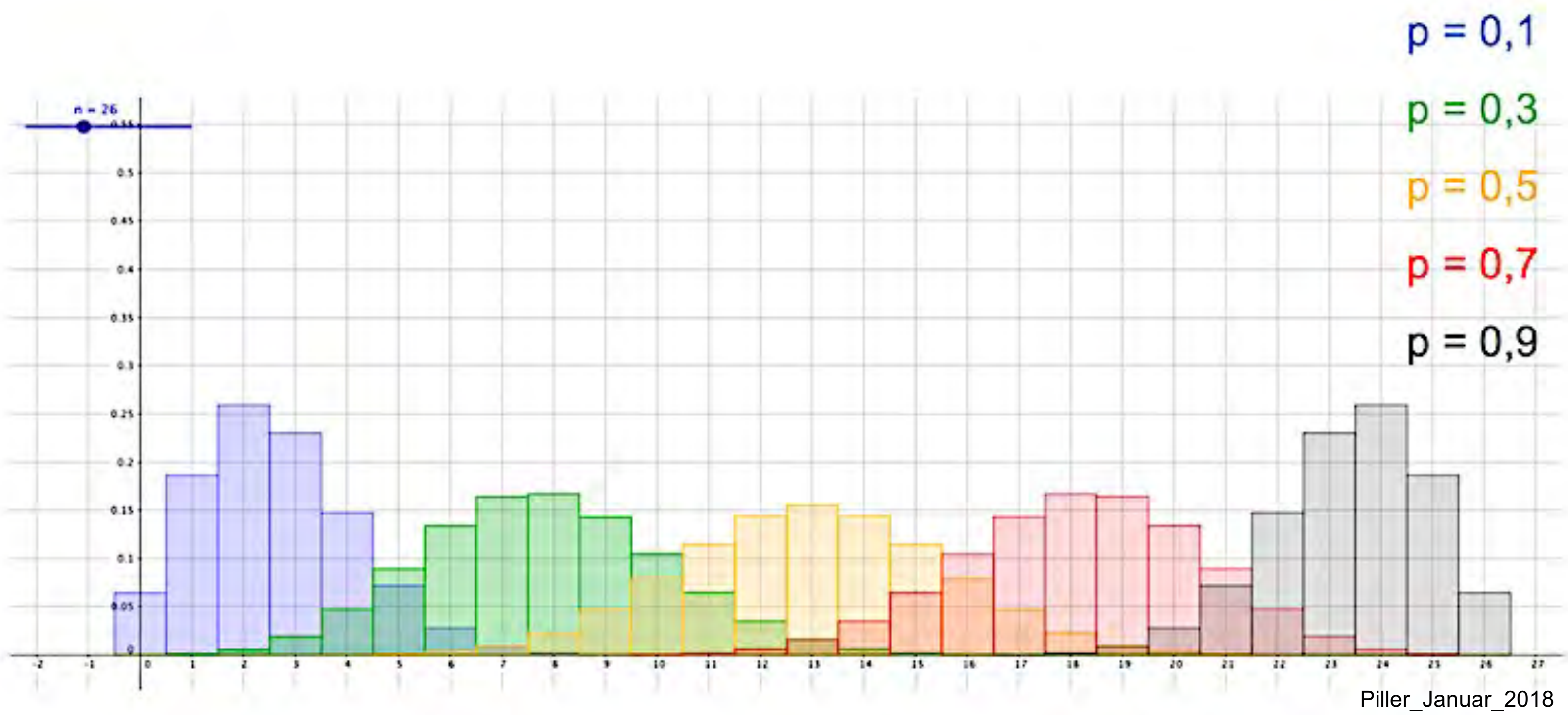
Binomialverteilung **BP 3.3.5 (10): „Histogrammverständnis“**

GeoGebra, Excel, Apps ... als Hilfsmittel zur Veranschaulichung nutzen:

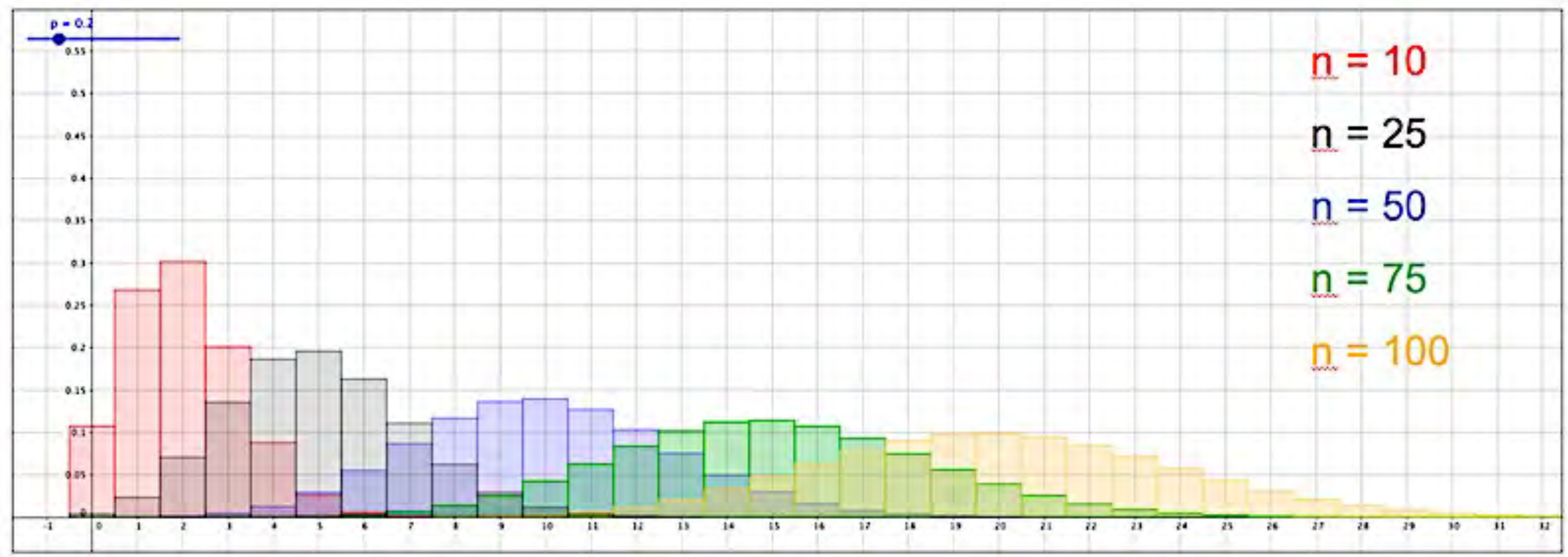
- Wie verändert sich das Histogramm, wenn man die Länge *n* der Kette verändert?
- Welchen Einfluss hat die Trefferwahrscheinlichkeit *p* auf das Aussehen des Diagramms?
- Wann liegt die größte Wahrscheinlichkeit vor?
- Mit Hilfsmitteln verschiedene Wahrscheinlichkeiten bestimmen:
  - genau k Treffer
  - höchstens k Treffer
  - mindestens k und höchstens m Treffer

Binomialverteilung

Einfluss von n und p auf das Histogramm



Einfluss von n und p auf das Histogramm



Piller_Januar_2018

Binomialverteilung

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

M	A	T	H	E
A	Z			H
T		P		T
H			G	A
E	H	T	A	M

Binomialverteilung Grenzen des WTR

In einer Schüssel befinden sich Legosteine. Tim hat die Augen verbunden und zieht mit Zurücklegen. Seine Ergebnisse werden von Lea notiert.
Wie oft muss er mindestens ziehen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70% mindestens zwei Mal einen gelben Legostein gezogen hat?

n gesucht

Der WTR kann keine Tabelle zum gezielten Suchen zur Verfügung stellen

→ Die Schülerinnen und Schüler müssen zielgerichtet probieren und sich folgende Fragen stellen:

➢ Bei welchem Wert starte ich mit „meiner Suche"?

Erwartungswert als Hilfe: $\mu = n \cdot p = n \cdot 0{,}25$

→ Sinnvoller Startwert: $n = 9$

Piller_Maerz_2018

➢ n vergrößern oder verkleinern?

Je öfter man aus der Schale zieht, umso wahrscheinlicher wird es mindestens zwei gelbe Legosteine zu erhalten.

Binomialverteilung

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

Binomialverteilung Grenzen des WTR

p gesucht

Wie hoch müsste mindestens der **Anteil** an blauen Legosteinen in der Schale mit 20 Steinen sein, damit Tim mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% in fünf Zügen mindestens zwei blaue bekommt?

Vorüberlegung:

- Informationen in eine Gleichung übertragen: $P(X = 0) + P(X = 1) \leq 0{,}1$
- Je mehr blaue Steine in der Schale sind, desto wahrscheinlicher wird es einen blauen Stein zu ziehen.
- Da die angestrebte Wahrscheinlichkeit sehr hoch ist wird der Anteil an blauen Steinen mehr als die Hälfte sein.

Binomialverteilung Grenzen des WTR

k gesucht

Von den 124 Zehntklässlern, die zum Förderunterricht Mathematik zugelassen sind, kommt ein Schüler erfahrungsgemäß mit 30% Wahrscheinlichkeit.
Bestimme die Anzahl der Tische, die im Unterrichtsraum mindestens gerichtet werden sollten, damit mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit jeder Schüler einen Tisch hat?

Vorüberlegungen

- Informationen in eine Gleichung übertragen: $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) \geq 0{,}9$
- Je weniger Schüler kommen, umso wahrscheinlicher wird es für alle einen Tisch zur Verfügung zu haben.
- Da die angestrebte Wahrscheinlichkeit sehr hoch ist wird der gesucht k-Wert kleiner als $\frac{n}{2}$ sein.

Binomialverteilung BP 3.3.5 (13): Erwartungswert und Standardabweichung

bisher schon: Definition Erwartungswert und Satz $\mu = n \cdot p$

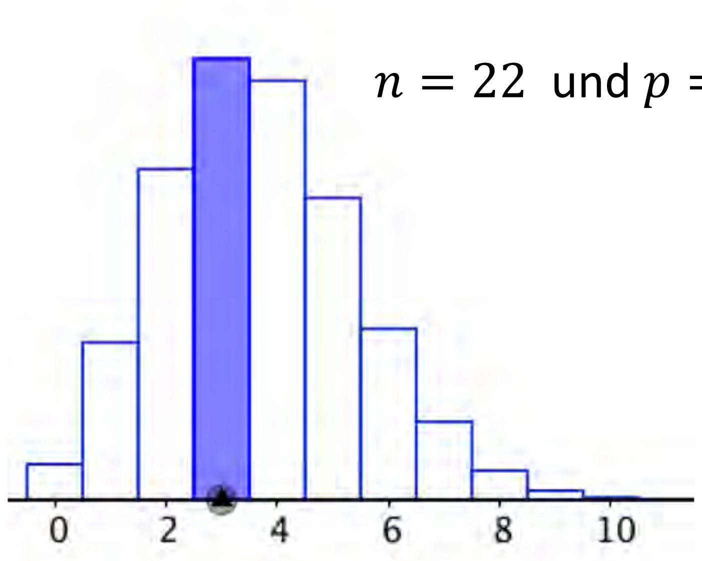
bewusst machen:

- Ist der Erwartungswert eine natürliche Zahl, so besitzt die zugehörige Trefferzahl die höchste Säule im Histogramm.

- Ansonsten gilt: der Differenzbetrag von Maximalstelle und Erwartungswert beträgt maximal 1 (siehe Hinweise).

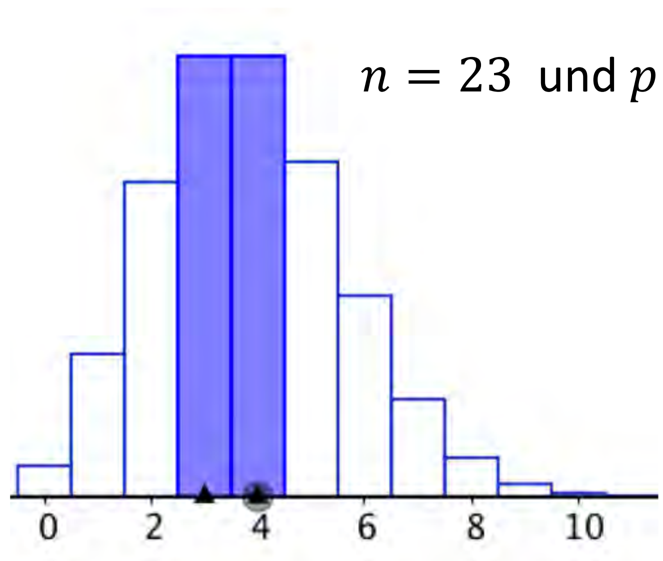
Binomialverteilung Erwartungswert: „klassischer Fehler“

„Lesen Sie den Erwartungswert aus den folgenden Histogrammen ab.“



$n = 22$ und $p = \frac{1}{6}$

$\mu \approx 3{,}\overline{6}$



$n = 23$ und $p = \frac{1}{6}$

$\mu \approx 3{,}8341$

Beide Bilder_Piller_Maerz_2018

Die höchste Säule (gerundeter Wert) muss **nicht** den Erwartungswert repräsentieren!

Binomialverteilung Erwartungswert

Beispielaufgabe:

Eine Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}25$.

Die Tabelle zeigt einen Teil der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

Prüfe und begründe, welcher Wert für n sinnvoll in Frage kommt: $n = 36$ oder $n = 41$ oder n =46

k	...	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
$P(X = k)$	...	0,08	0,11	0,13	0,14	0,13	0,11	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	...

Binomialverteilung

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

Möglicher Lösungsansatz

- Da X binomialverteilt ist, gilt für den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$
- $n = 36$: $\mu = 36 \cdot 0{,}25 = 9$

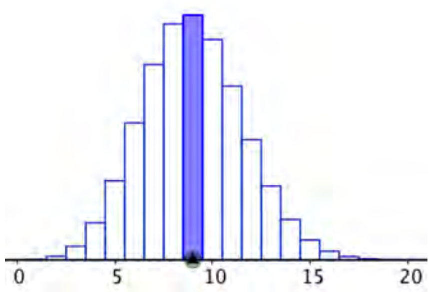
  der größte Wert von $P(X = k)$ liegt bei 9 — falsch
- $n = 41$: $\mu = 41 \cdot 0{,}25 = 10{,}25$

  der größte Wert von $P(X = k)$ liegt bei 10 oder 11 — richtig
- $n = 46$: $\mu = 46 \cdot 0{,}25 = 11{,}5$

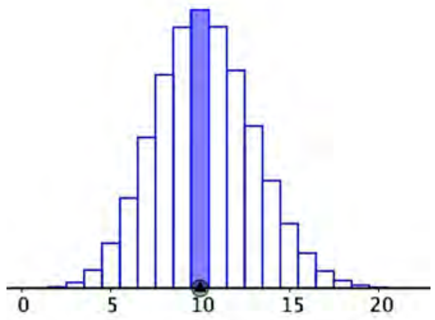
  der größte Wert von $P(X = k)$ liegt bei 11 oder 12 — falsch

Binomialverteilung

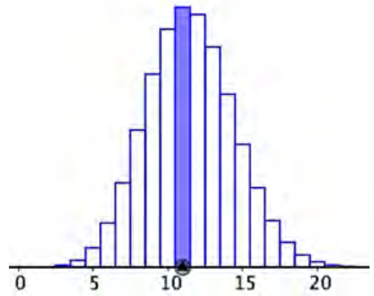
Diskussion im Unterricht von „falschen Lösungsansätzen“:



$n = 36$
$p = 0{,}25$



$n = 41$
$p = 0{,}25$



$n = 46$
$p = 0{,}25$

Alle_Bilder_Piller_Maerz_2018

Mögliche Schülerantworten:
Da für n = 41 bei 10 die höchste Säule auftritt, kommt nur n = 41 in Frage.

oder:
Da $\mathrm{P}(X = k)$ bei $k = 10$ den größtmöglichen Wert annimmt, muss dies der Erwartungswert sein.
Da X binomialverteilt ist gilt $\mathrm{n} = \frac{\mu}{p} = \frac{10}{0{,}25} = 40$; da 41 am nächsten an 40 liegt …

Binomialverteilung Erwartungswert Beweis

Beweisen für wen und wie?

- $\mu = n \cdot p$ durch intuitive Plausibilitätsbetrachtung Einsicht bei Schülern möglich
- aber: notwendiges Hintergrundwissen für Fachlehrkraft; auch mögliche Binnendifferenzierung nach oben
- Im Bildungsplan explizit ausgeführte pbK
- Mögliche GFS für einen fachlich starken Schüler

Binomialverteilung Erwartungswert Beweis

Beweisvarianten stehen in einer Extradatei zur Verfügung

Mögliche Unterstützungen könnten sein:

- Tippkarten
- Aufbau als Beweispuzzle (vgl. ZPG 5)
- Lückentext
- Laufbeweis
- .....

Neu: Standardabweichung

Aufgriff Standards 8: Boxplots (Spiralcurriculum)
Streuung als Informationsquelle

- für die Abweichung der Messdaten voneinander
  Wiederholung: Spannweite, Quartilabstand

- für die Abweichungssumme von einem Mittelwert.
  mittlere absolute Abweichung vom Median, Standardabweichung

Standardabweichung

Zu erzeugende Schülereinsicht:

- Der Erwartungswert beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nur unzureichend.
- Man bräuchte so etwas wie die „mittlere Abweichung vom Erwartungswert".
- Es kommt auch auf die *Streuung* der Ergebnisse um den Erwartungswert an.

Standardabweichung

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung von Messdaten. Mit ihrer Hilfe werden die Abstände aller Messdaten zum Mittelwert ausgewertet.

Beispiel:

In zwei Klassen wird nach der Höhe des monatlichen Taschengeldes gefragt.

Klasse a: 24, 34, 34, 37, 23, 30, 32, 34, 38, 22, 23, 55, 54, 54, 51, 32, 21, 36, 54, 51

Klasse b: 21, 37, 35, 36, 38, 35, 36, 37, 38, 38, 34, 37, 55, 37, 40, 37, 34, 37, 35, 42

Die Schüler welcher Klasse bekommen im Durchschnitt mehr Taschengeld?
In welcher Klasse sind die Taschengeld-Unterschiede kleiner?

Binomialverteilung

Standardabweichung

Man unterscheidet enge und weite Streuungen.

	Klasse a	Klasse b
Arithmetisches Mittel	36,95	36,95
Median	33	36,5
Minimum	21	21
Maximum	55	55
Standardabweichung	≈ 11,73	≈5,696

Eine mögliche Merkhilfe könnte sein....

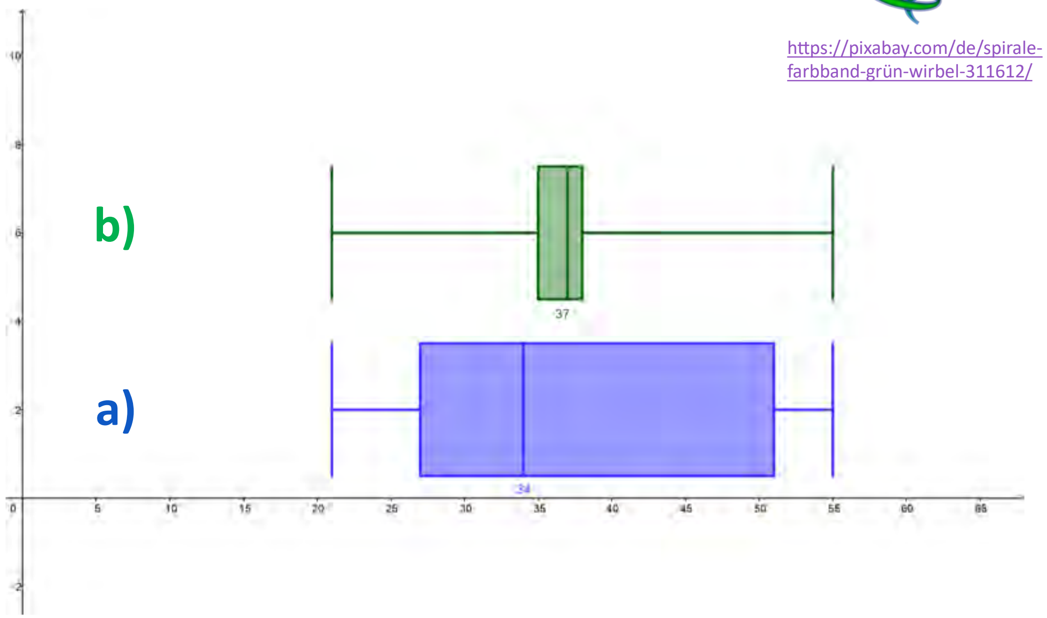
Beide_Bilder_Piller_Juli_2017

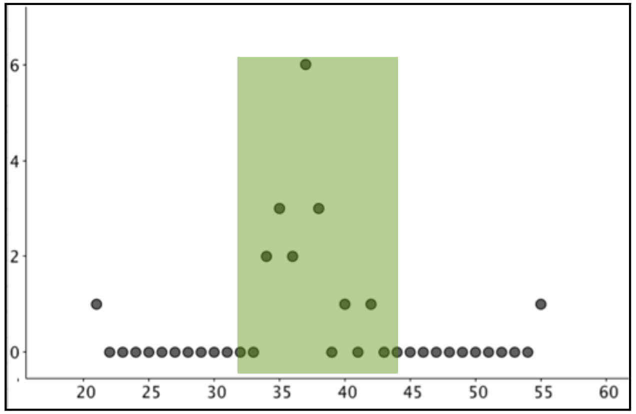
Standardabweichung

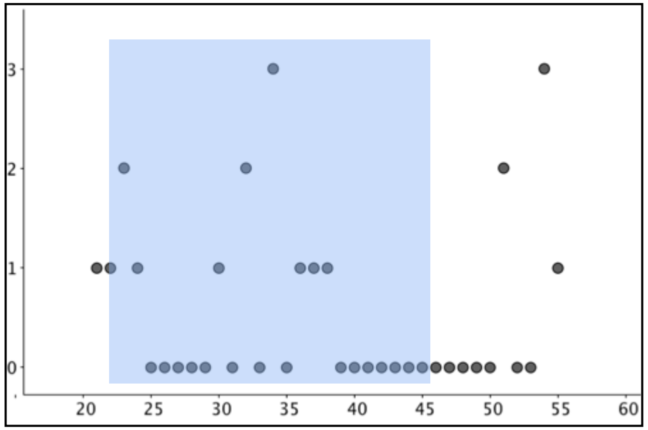
Boxplot

Standardabweichung

https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/







Alle_Bilder_Piller_Maerz_2018

Standardabweichung

Zu erzeugende Schülereinsicht:

- Die „mittlere Abweichung vom Erwartungswert“ kann nicht durch einfaches Addieren der Abweichungen berechnet werden, denn diese heben sich ggf. auf.

- Man könnte die *Beträge* der Abweichungen addieren und durch die Anzahl der Ergebnisse dividieren.
  (Achtung: Ausreißer)

Standardabweichung

- Ebenso könnte man die *Quadrate* der Abweichungen addieren und durch die Anzahl der Ergebnisse dividieren.

  Auf diese Weise werden größere Abweichungen stärker gewichtet als kleinere. (Varianz)

- Die Quadratwurzel aus der Varianz hat wieder „die richtige Einheit“ und kann somit als Standardabweichung verwendet werden. Dies führt auf die naheliegende (und sinnvolle) Definition:

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)}$$

Standardabweichung Einführungsbeispiel: Plausibilität der Formel

Es wird aus der Schale ein Spielstein gezogen, der anschließend wieder zurückgelegt wird.

Piller_Maerz_2018

Betrachte die Zufallsvariablen X, Y und Z:

X: Anzahl der blauen Steine bei zweimaligem Ziehen.

Y: Anzahl der roten Steine bei dreimaligem Ziehen.

Z: Anzahl der roten oder blauen Steine bei viermaligem Ziehen.

Berechne die Standardabweichungen von X, Y und Z.

Standardabweichung Einführungsbeispiel

Lösungsvorschlag (1)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$

X ist binomialverteilt mit $n = 2,\ p = \frac{1}{3}$ und $q = \frac{2}{3}$.

$$\sigma_X^2 = \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$	$3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

Y ist binomialverteilt mit $n = 3$ und $p = \frac{1}{6}$ und $q = \frac{5}{6}$

$$\sigma_Y^2 = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5}{12} = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

Standardabweichung Einführungsbeispiel

Lösungsvorschlag (2)

z_i	0	1	2	3	4
$P(Z = z_i)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Z ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$.

$$\sigma_Z^2 = (0-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + (1-2)^2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + (2-2)^2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + (3-2)^2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + (4-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Standardabweichung Beispiel 2

Gegeben sei die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette angibt. Es werden die beiden folgenden Experimente betrachtet:

(1) $n = 50; \quad p = 0{,}2$

(2) $n = 50; \quad p = 0{,}5$

a) Berechne jeweils den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

b) Zeichne die beiden zugehörigen Histogramme in ein gemeinsames Koordinatensystem.

c) Für welche Trefferwahrscheinlichkeit p liegt generell die größte Standard-abweichung vor?

Begründe.

Binomialverteilung

Bildungsplan | Fachliches | Unterricht | Fazit

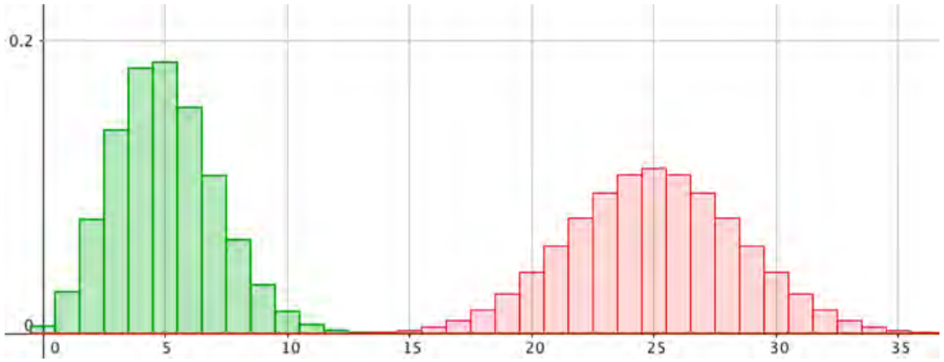
Standardabweichung Beispiel

Berechne jeweils den Erwartungswert und die Standardabweichung.

(1) $\mu = 50 \cdot 0{,}2 = 10$ $\quad\quad$ $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \approx 2{,}828$

(2) $\mu = 50 \cdot 0{,}5 = 25$ $\quad\quad$ $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 3{,}536$

Zeichne die zugehörigen Histogramme in ein gemeinsames Koordinatensystem.



Piller_Maerz_2018

Für welche Trefferwahrscheinlichkeit p liegt bei konstantem n die größte Standardabweichung vor?

Radikandenbetrachtung: Die größte Standardabweichung liegt für $p = 0{,}5$ vor.

$$f(p) = np - np^2$$
$$f'(p) = n - 2np$$


https://pixabay.com/de/spirale-farbband-grün-wirbel-311612/

Schülerwissen – Binomialverteilung - Erwartungswert – Standardabweichung

- Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Kettenlänge n:

$$\mu = n \cdot p$$

- Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit Trefferwahrschein-lichkeit p und Kettenlänge n:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

- Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Kettenlänge n:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Binomialverteilung

- Spiralcurriculum: stetige Vertiefung im Bereich Daten und Zufall
- Vertiefung der kombinatorischen Kenntnisse mit Ziel die Bedeutung des Binomialkoeffizienten im Zusammenhang mit der Binomialverteilung erläutern zu können.
- Visualisierung einer Binomialverteilung (Einfluss der Parameter)
- Erwartungswert einer Binomialverteilung berechnen und ablesen können
- Standardabweichung berechnen und als Analysemittel nutzen

Binomialverteilung

Piller_Maerz_2018_nach_Pixabay_Juli_2017