(Formales) Beweisen

Vorgehen beim formalen Beweisen:
0) Skizze anfertigen
1) Voraussetzung formulieren
2) Behauptung formulieren
3) Beweis führen (mit Angabe der verwendeten Sätze bzw. Eigenschaften)

Beweise:

Zeichnet man in einem Trapez die Diagonalen ein, so sind zwei der entstandenen Dreiecke ähnlich zueinander.

Skizze:

Voraussetzung:

Behauptung:

Beweis:

Wähle nun einen der Sätze auf der Rückseite aus, fertige eine Skizze an, formuliere Voraussetzung und Behauptung und führe den Beweis.

Benötigst du Hilfe? Dann stehen dir drei Hilfestufen zur Verfügung:

Beweisinspirationen nutzen kleine Hilfe
Beweis ergänzen } große Hilfe
Beweisschritte sortieren

Spezieller Sehnensatz:

Ist die Strecke $\overline{AB}$ der Durchmesser eines Kreises und schneiden sich zwei von den Punkten A und B ausgehende Sehnen im Punkt S, so ist das Produkt der Längen der dadurch gebildeten Teilstrecken auf der einen Sehne gleich dem Produkt der Längen der Teilstrecken auf der anderen Sehne.

Höhenverhältnisse im Dreieck:

Das Verhältnis der Längen zweier Höhen entspricht dem Kehrwert aus dem Verhältnis der Längen der zugehörigen Seiten.

Rechteck falten:

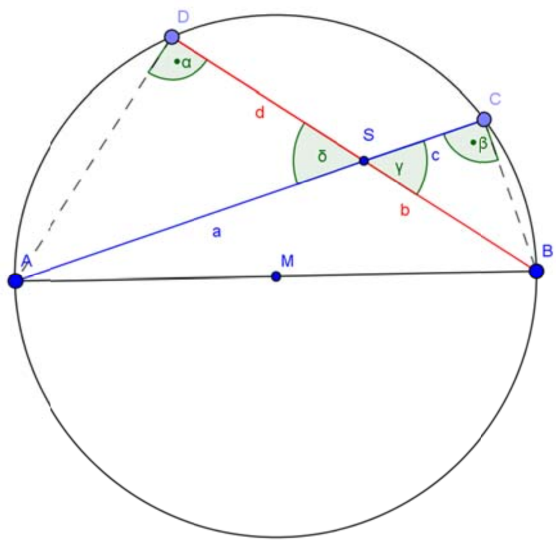
Falte ein DIN A4-Blatt (Hochformat) so, dass die rechte untere Ecke auf der oberen Kante zu liegen kommt. Es entstehen drei Dreiecke.
Zeige, dass die entstandenen Dreiecke zueinander ähnlich sind.

Höhensatz:

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:
Das Produkt der Längen der Hypotenusenabschnitte ist gleich dem Quadrat der Länge zugehörigen Höhe.

Ergänze den Beweis des speziellen Sehnensatzes:

Skizze:



Voraussetzung: $\overline{AB}$ ist der Durchmesser eines Kreises
C und D liegen auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$

Behauptung: ……………………………

Beweis: ………………………

(Scheitelwinkel)

und $\alpha = \beta = 90°$ (……………………………)

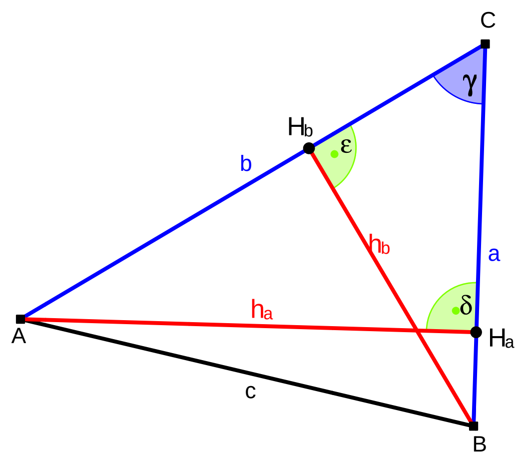
$\Rightarrow$ Δ ……… ist ähnlich zu Δ ……… (Ähnlichkeitssatz ww)

$\Rightarrow$ $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $|\cdot d; \cdot a$

$c \cdot a = b \cdot d$ q.e.d

Ergänze den Beweis für die Höhenverhältnisse im Dreieck:

Skizze:



Voraussetzung: $h_a \perp a;\ h_b \perp b$

Behauptung: $\frac{h_a}{\square} = \frac{\square}{a}$

Beweis: $\gamma = \gamma$

und $\delta = \varepsilon =$ ……… (Höhe im Dreieck)

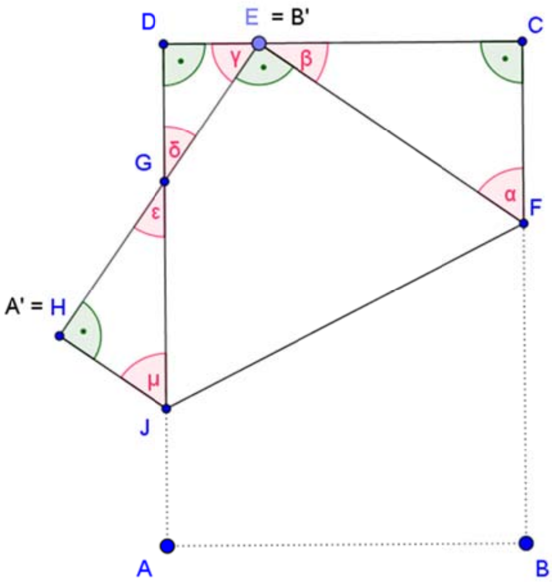
$\Rightarrow$ Δ ……… ist ähnlich zu Δ ……… (Ähnlichkeitssatz ww)

$\Rightarrow$ $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $|\cdot b; : h_b$

$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$ q.e.d.

Ergänze den Beweis zum Nachweis der Ähnlichkeit der Dreiecke, die beim Falten eines Rechtecks entstehen:

Skizze:



Voraussetzung: Viereck ABCD ist ein Rechteck

Behauptung: ………………………………………………

Beweis: $\sphericalangle GDE = \sphericalangle JHG = 90°$ (Ecke im Rechteck)

und ……………………… (Scheitelwinkel)

$\Rightarrow$ Δ ………. ist ähnlich zu Δ ……… (Ähnlichkeitssatz ww)

……………………… $= 90°$ (1) (Ecke im Rechteck)

$\gamma + 90° + \beta =$……….. (Nebenwinkel)

$\alpha + 90° + \beta = 180°$ (…………………………………………)

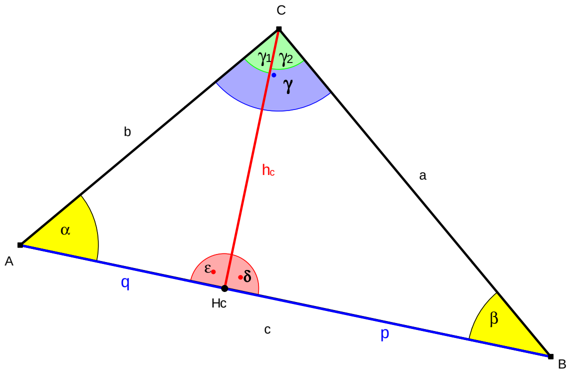
$\Rightarrow$ …… $=$ …… (2)

(1) und (2) $\Rightarrow$ Δ ………. ist ähnlich zu Δ ……… (Ähnlichkeitssatz ww)

q.e.d.

Ergänze den Beweis des Höhensatzes:

Skizze:



Voraussetzung: $h_c \perp c$; $\gamma = \ldots\ldots\ldots$

Behauptung: ……………………..……

Beweis: ………… = …………….. $= 90°$ (Höhe im Dreieck)

$\gamma_1 = 180° - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \beta$ (…………………………………………………………)

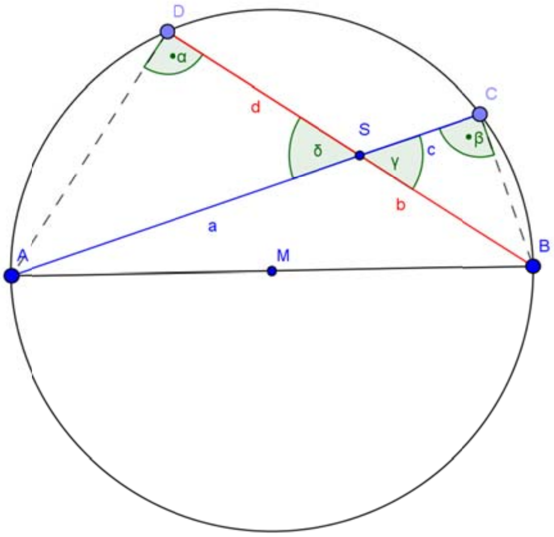
$\gamma_2 = 180° - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha$ (…………………………………………………………)

$\Rightarrow$ $\Delta \ldots\ldots\ldots$ ist ähnlich zu $\Delta \ldots\ldots\ldots$ (Ähnlichkeitssatz ww)

$\Rightarrow$ $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $|\cdot p; \cdot h_c$

$q \cdot p = {h_c}^2$ q.e.d.

Sortiere die Beweisschritte für den speziellen Sehnensatz, gib auch die Begründungsbasis an
(z.B. ob und welcher Ähnlichkeitssatz verwendet wurde)**:**



Voraussetzung

Behauptung

Beweis

$\Delta\, ASD$ ist ähnlich zu $\Delta\, BCS$

$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$

C und D liegen auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$

$a \cdot c \;=\; b \cdot d$

$\gamma \;=\; \delta$

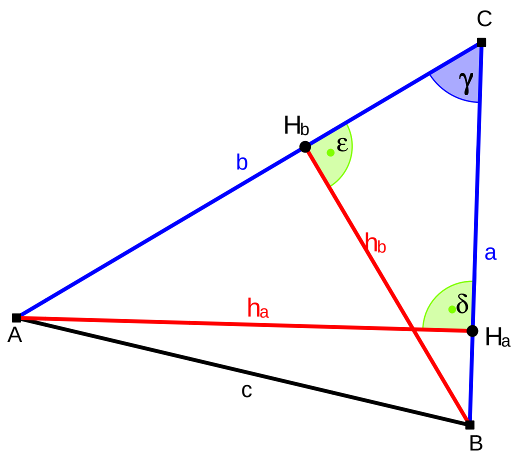
$\alpha \;=\; \beta \;=\; 90°$

$|\cdot d; \cdot a$

$\overline{AB}$ ist der Durchmesser eines Kreises

$c \cdot a \;=\; b \cdot d$

Sortiere die Beweisschritte für die Höhenverhältnisse im Dreieck, gib auch die Begründungsbasis an
(z.B. ob und welcher Ähnlichkeitssatz verwendet wurde)**:**



Voraussetzung

Behauptung

Beweis

$\Delta\, AH_aC$ ist ähnlich zu $\Delta\, BCH_b$

$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$

$\frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$

$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$

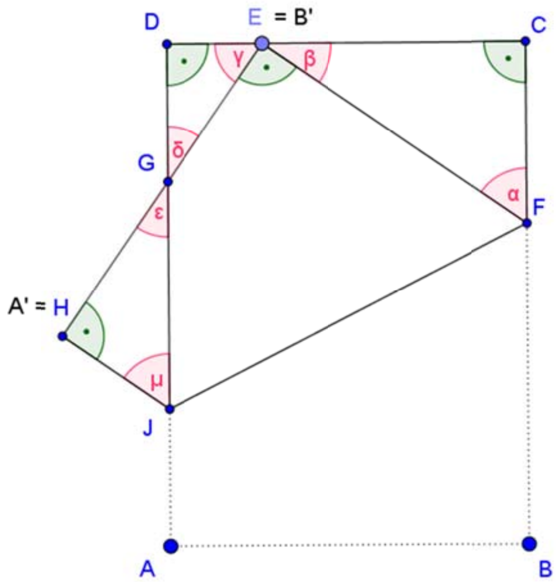
$h_a \perp a;\; h_b \perp b$

$|\cdot b; : h_b$

$\gamma \;=\; \gamma$

$\delta \;=\; \varepsilon \;=\; 90°$

Sortiere die Beweisschritte zum Nachweis der Ähnlichkeit der Dreiecke, die beim Falten eines Rechtecks entstehen, gib auch die Begründungsbasis an
(z.B. ob und welcher Ähnlichkeitssatz verwendet wurde)**:**



Voraussetzung

Die Dreiecke EFC und GED und JGH sind ähnlich zueinander

Behauptung

$\delta = \varepsilon$

$\gamma \;=\; \alpha$

Beweis

$\Delta\, GED$ ist ähnlich zu Δ JGH

$\Delta\, GED$ ist ähnlich zu Δ EFC

$\sphericalangle GDE = \sphericalangle ECF \;=\; 90°$

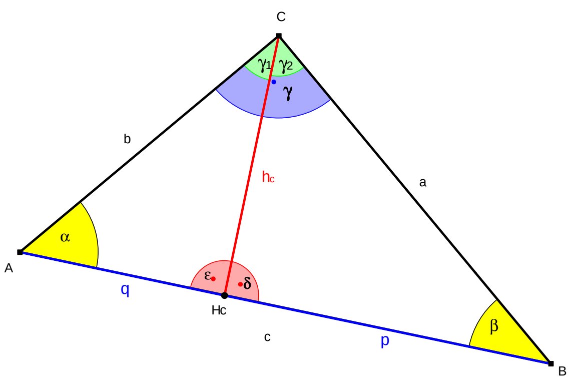
$\gamma + 90° + \beta = 180°$

$\sphericalangle GDE = \sphericalangle JHG \;=\; 90°$

$\alpha + 90° + \beta = 180°$

Viereck ABCD ist ein Rechteck

Sortiere die Beweisschritte für den Höhensatz, gib auch die Begründungsbasis an
(z.B. ob und welcher Ähnlichkeitssatz verwendet wurde)**:**



Voraussetzung

$\gamma_1 = 180° - 90° - \alpha = 180° - \gamma - \alpha = \beta$

Behauptung

$\gamma_2 = 180° - 90° - \beta = 180° - \gamma - \alpha = \alpha$

Beweis

$\dfrac{q}{h_c} = \dfrac{h_c}{p}$

$\gamma \;=\; 90°$

$h_c \perp c$

$p \cdot q = {h_c}^2$

$|\cdot p; \cdot h_c$

$p \cdot q = {h_c}^2$

$\Delta\, AH_cC$ ist ähnlich zu $\Delta\, BCH_c$

Beweisinspirationen zum speziellen Sehnensatz

Suche ähnliche Dreiecke, deren Ähnlichkeit du durch die Übereinstimmung in zwei Winkeln nachweisen kannst. Nutze hierfür dir bekannte Sätze.
Was gilt dann für die Seitenverhältnisse in diesen Dreiecken?
Am Ende hilft dir eine algebraische Umformung weiter.

Beweisinspirationen für die Höhenverhältnisse im Dreieck

Suche ähnliche Teildreiecke, deren Ähnlichkeit du durch die Übereinstimmung in zwei Winkeln nachweisen kannst.
Was gilt dann für die Seitenverhältnisse in diesen Dreiecken?
Am Ende hilft dir eine algebraische Umformung weiter.

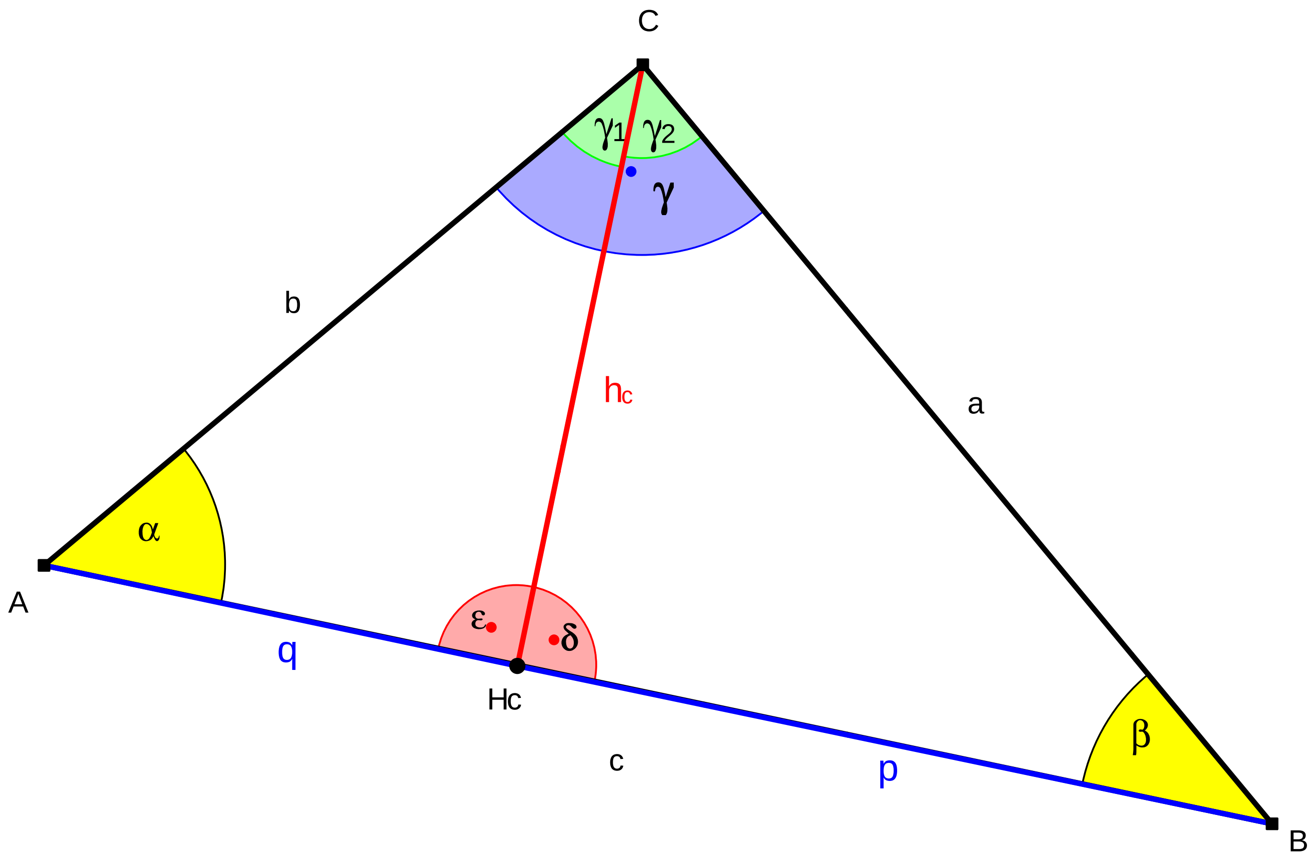
Beweisinspirationen zum Nachweis der Ähnlichkeit der Dreiecke, die beim Falten eines Rechtecks entstehen

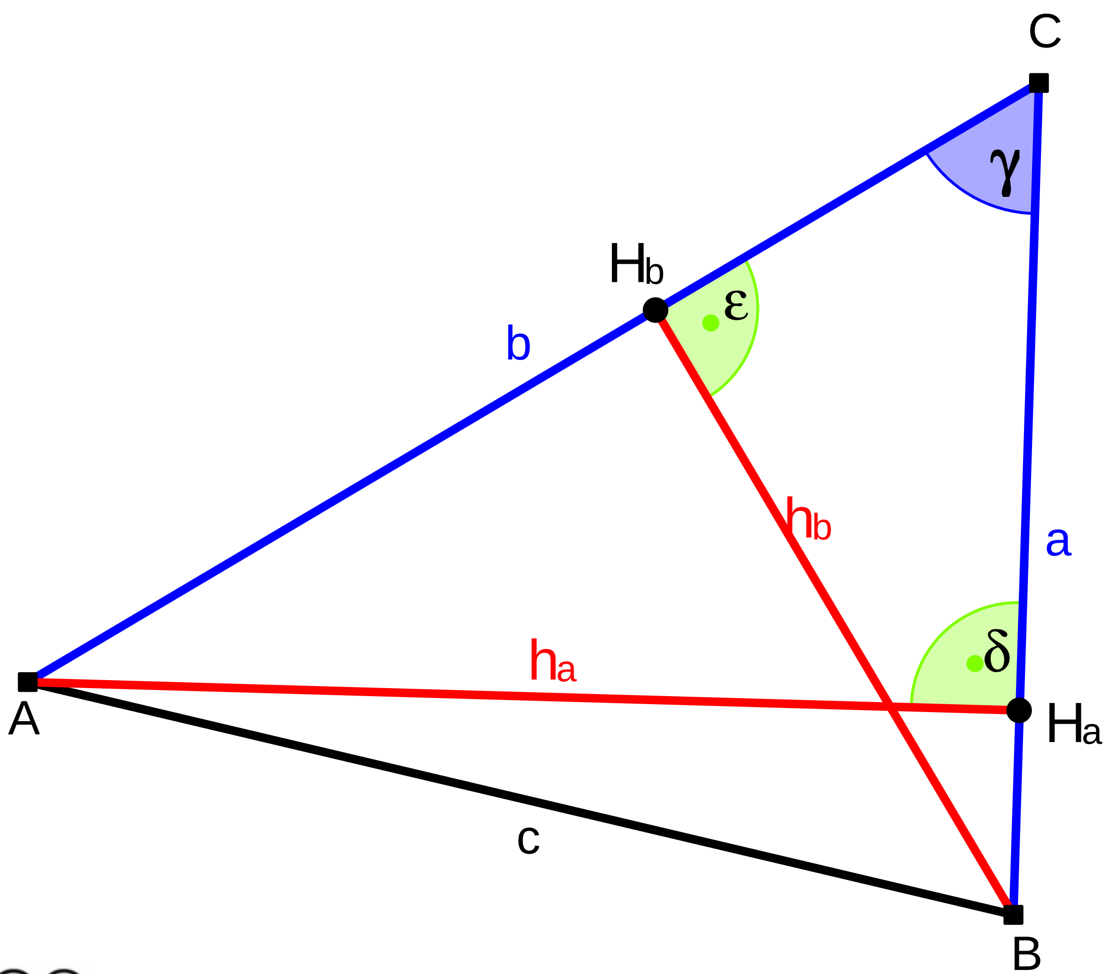
Suche in den entstandenen Dreiecken nach Winkeln, die übereinstimmen. Nutze dir bekannte Winkelsätze, um die Übereinstimmung nachzuweisen.

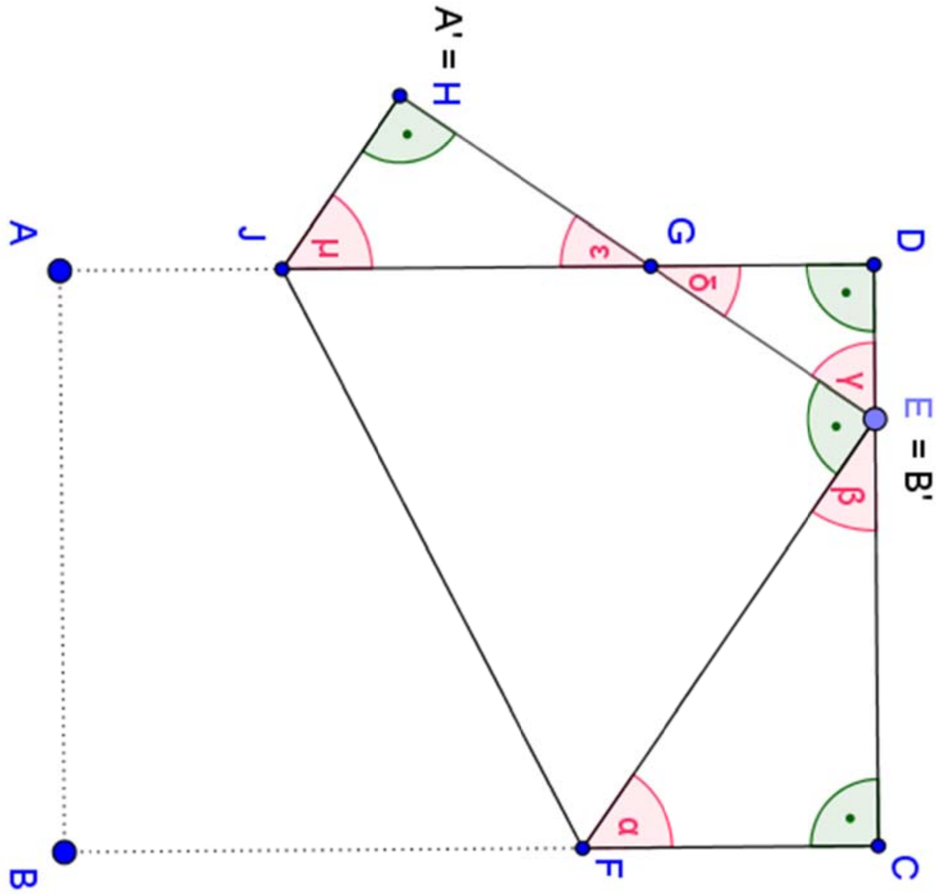
Beweisinspirationen zum Höhensatz

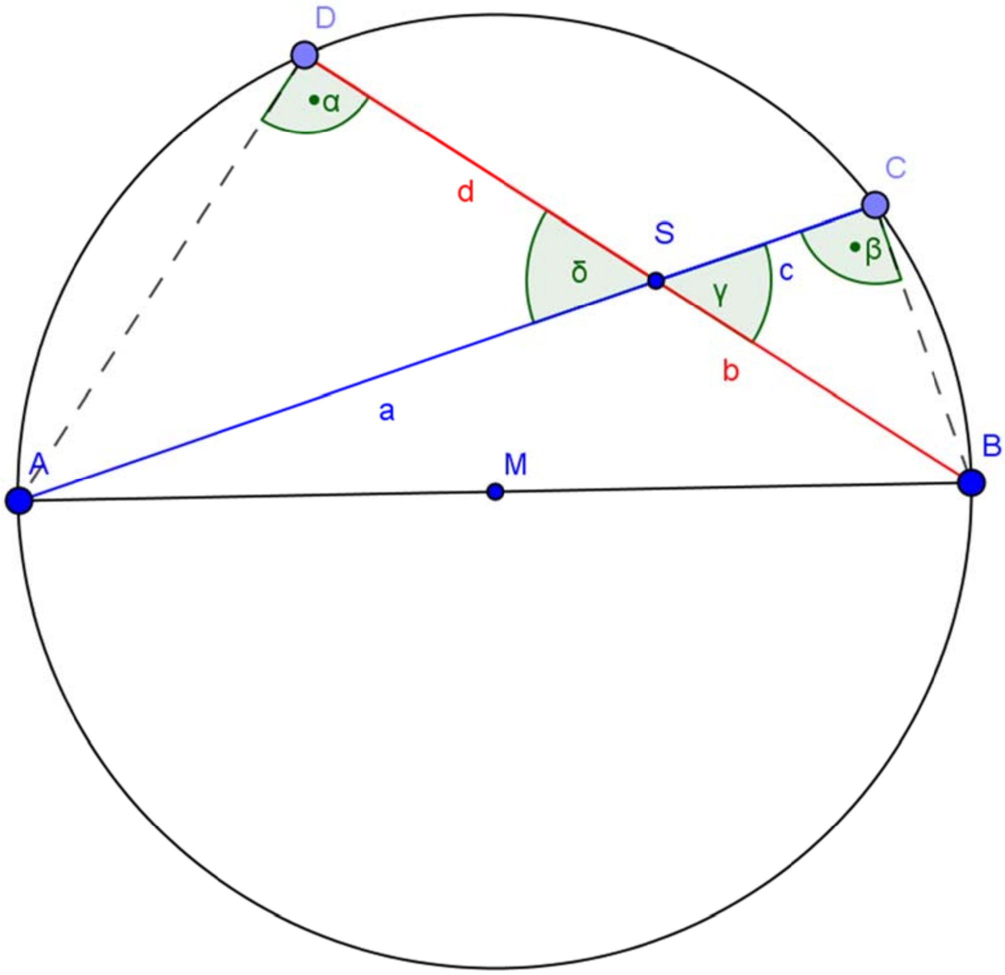
Suche ähnliche Teildreiecke, deren Ähnlichkeit du durch die Übereinstimmung in zwei Winkeln nachweisen kannst. Nutze hierfür auch den Satz über die Winkelsumme im Dreieck.
Was gilt dann für die Seitenverhältnisse in diesen Dreiecken?
Am Ende hilft dir eine algebraische Umformung weiter.

Skizzen (ohne Zuordnung) als weitere Hilfestellung:






A' = H
A
J
μ
ε
G
δ
D
γ
E = B'
β
α
B
F
C


D
α
d
C
S
δ
γ
c
β
b
a
A
M
B