

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P		T	
H	G			A
E	H	T	A	M

# Kursstufe ab 2019

## Die Normalverteilung

### Basis- und Leistungsfach

Groß-Schmitt, Kronberger, Mehnert, Uhl

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Diskrete Verteilungen

- Werte diskreter Zufallsgrößen sind abzählbar und können durchnummeriert werden.
- Darstellung der Wahrscheinlichkeiten in Tabellen oder Histogrammen
- Die Zufallsgröße  $X$  besitzt den Erwartungswert

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

- Für die Standardabweichung  $\sigma$  gilt

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}$$

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

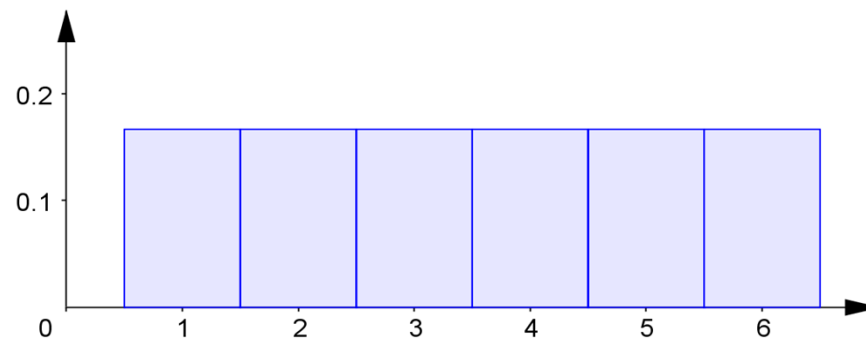
Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Diskrete Verteilungen – Beispiel 1

Einmaliges Werfen eines Würfels: die Zufallsgröße  $X$  gibt die Augenzahl an. Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$$\mu = 3,5$$

$$\sigma \approx 1,71$$

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

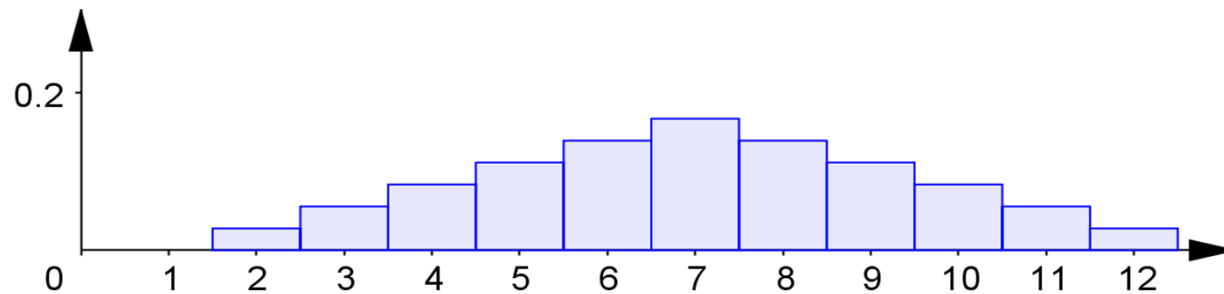
M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches      Didaktisches      Unterrichtsgang BF      Unterrichtsgang LF

## Diskrete Verteilungen – Beispiel 2

Zweimaliges Werfen eines Würfels: die Zufallsgröße  $X$  gibt die Summe der Augenzahlen an. Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$\mu = 7$$
$$\sigma \approx 2,42$$

M	A	T	H	E
A	z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

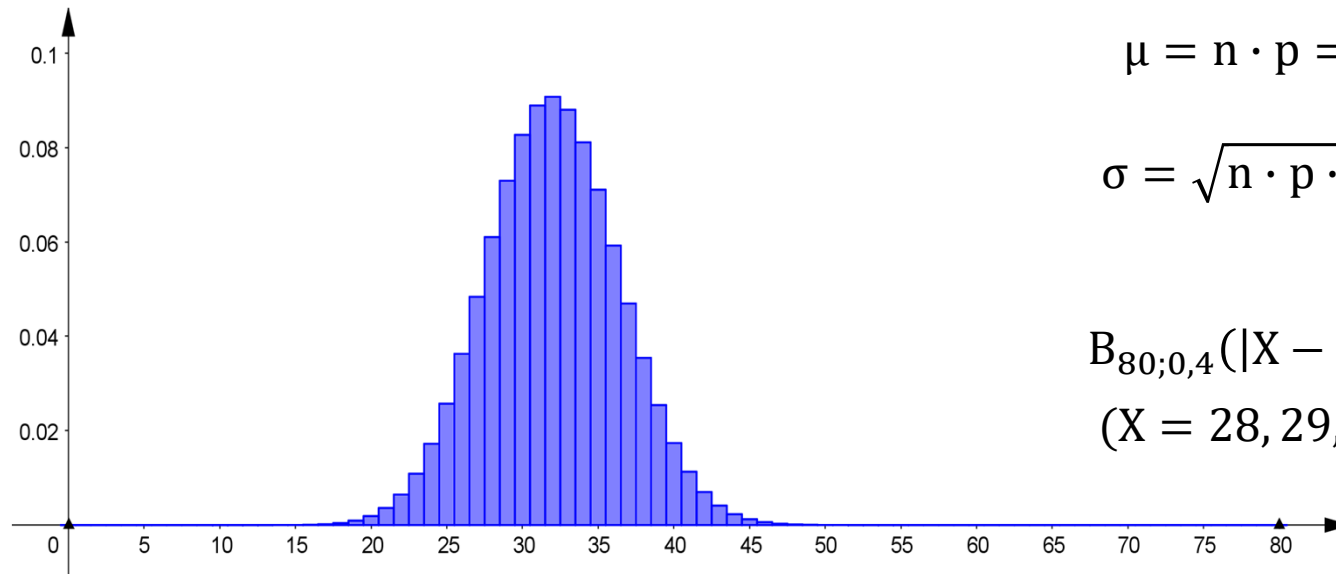
Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Diskrete Verteilungen – Beispiel 3

Binomialverteilung mit Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  und Länge  $n$ ; die Zufallsgröße  $X$  gibt die Anzahl der Treffer an, z.B.  $n = 80$  und  $p = 0,4$ .



$$\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0,4 = 32$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 4,38$$

$$B_{80;0,4}(|X - \mu| \leq \sigma) \approx 0,696$$

$$(X = 28, 29, \dots, 35 \text{ oder } 36)$$

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Stetige Verteilungen

- Wertebereiche stetiger Zufallsgrößen können Intervalle sein.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  wird mit Hilfe der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet.
- **Definition:**  
Eine integrierbare Funktion  $f$  heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte** über einem Intervall  $I$  ( $I = [a; b]$  oder  $I = (a; b)$ ), wenn gilt:

$$(1) \quad f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \text{ aus } I$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = 1 \quad (\text{falls } I = \mathbb{R}: \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1).$$

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Stetige Verteilungen

Eine **Zufallsgröße**  $X$ , die Werte aus dem Intervall  $I$  annimmt, heißt **stetig verteilt** mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$ , wenn für alle  $r_1, r_2$  aus  $I$  gilt:

$$P(r_1 \leq X \leq r_2) = \int_{r_1}^{r_2} f(x) dx .$$

Die Funktion  $F$  mit

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

heißt **Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße  $X$ .

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Stetige Verteilungen

Weiter legt man in Anlehnung an die Definition im diskreten Fall fest:

Erwartungswert von  $X$ : 
$$\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Standardabweichung von  $X$ : 
$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx}$$



M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Stetige Verteilungen – Arbeitsauftrag

- (1) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ ,  $x \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  ein Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- (2) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der zugehörigen Zufallsgröße  $X$ .
- (3) Bestimmen Sie den Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  von  $X$ .

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
	G			A
				M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Beachte:  
Die Funktionswerte  
 $f(x)$  sind keine  
Wahrscheinlichkeiten

## Stetige Verteilungen – Beispiel 1

Gleichverteilung: Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt eine Zufallszahl im Intervall  $I = [0; 1]$ .

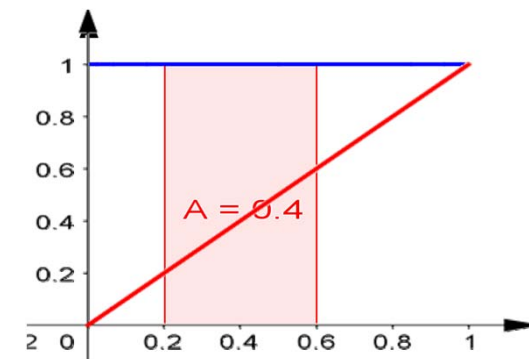
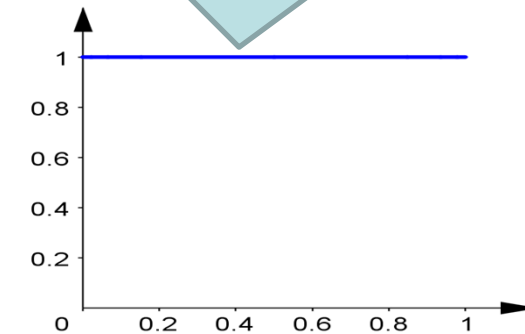
Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  mit  $f(x) = 1; 0 \leq x \leq 1$

Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls  $[0,2; 0,6]$ :

$$P(0,2 \leq X \leq 0,6) = \int_{0,2}^{0,6} 1 dx = 0,6 - 0,2 = 0,4$$

kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(X \leq z) = \int_0^z f(x) dx$$



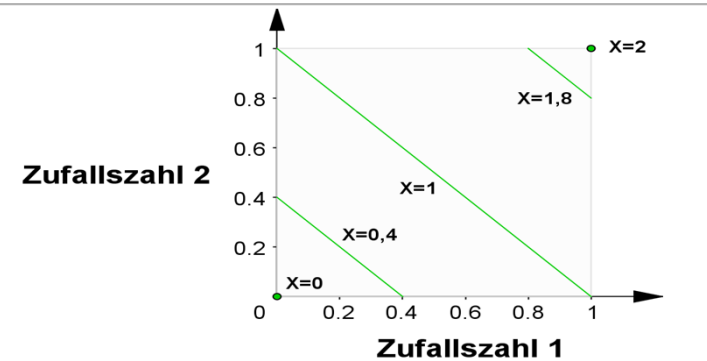
# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches	Didaktisches	Unterrichtsgang BF	Unterrichtsgang LF
------------	--------------	--------------------	--------------------

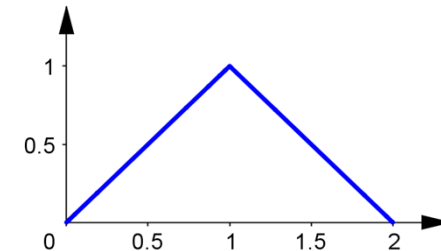
## Stetige Verteilungen – Beispiel 2

Summe zweier Zufallszahlen:  
 Die Zufallsgröße  $X$  gibt die Summe aus zwei Zufallszahlen zwischen 0 und 1 an.



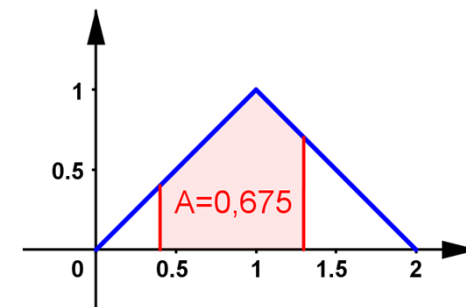
Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  mit:

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & , 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls  $[0,4; 1,3]$  :

$$P(0,4 \leq X \leq 1,3) = \int_{0,4}^{1,3} f(x)dx = 0,675$$



M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

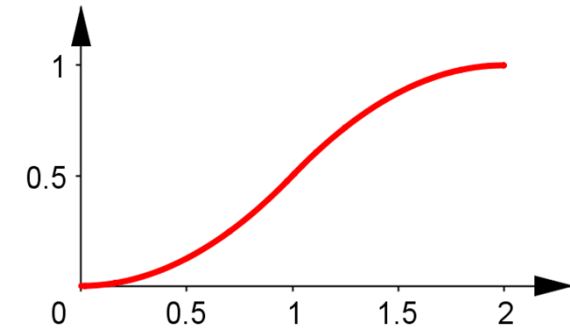
Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Stetige Verteilungen – Beispiel 2

kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(0 \leq X \leq b) = \begin{cases} 0,5b^2, & 0 \leq b \leq 1 \\ -0,5(2 - b)^2 + 1, & 1 < b \leq 2 \end{cases}$$



Kenngößen:

$$\mu = E(X) = \int_0^2 x \cdot f(x) dx = 1$$

$$\sigma = \sqrt{\int_0^2 (x - 1)^2 \cdot f(x) dx} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,41$$

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

- Fachliches
- Didaktisches
- Unterrichtsgang

Kann man das berechnen?

## Stetige Verteilungen – Beispiel 3

Die Gaußsche Glockenfunktion:

Die Gaußfunktion

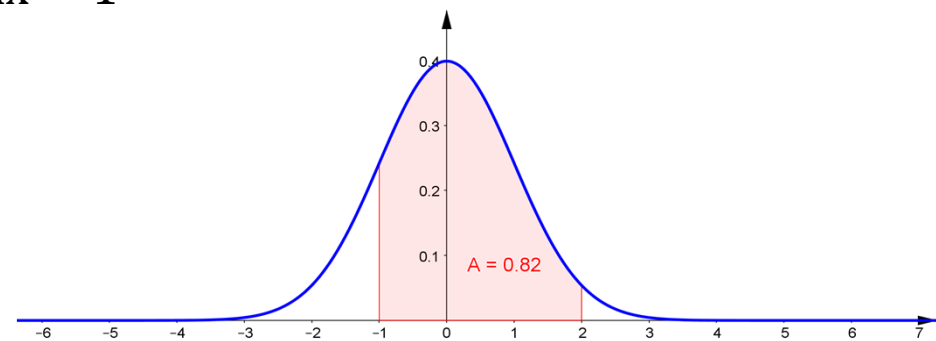
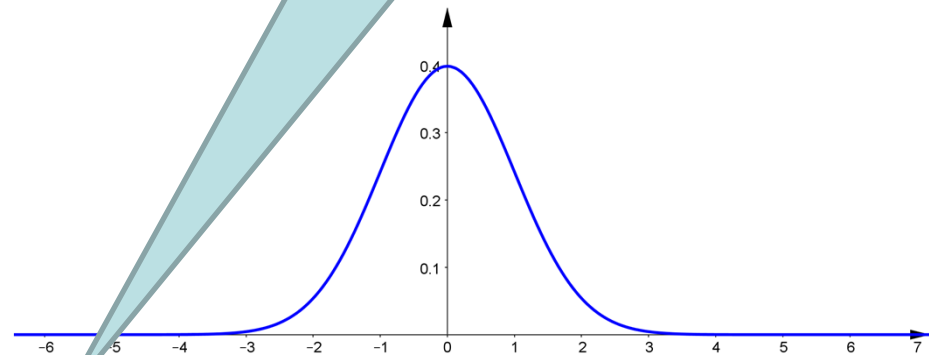
$\varphi$  mit  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

erfüllt die Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

(1)  $\varphi(x) \geq 0$       (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$

Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls  $[-1; 2]$  :

$P(-1 \leq X \leq 2) = \int_{-1}^2 \varphi(x) dx \approx 0,82$



M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Stetige Verteilungen – Beispiel 3

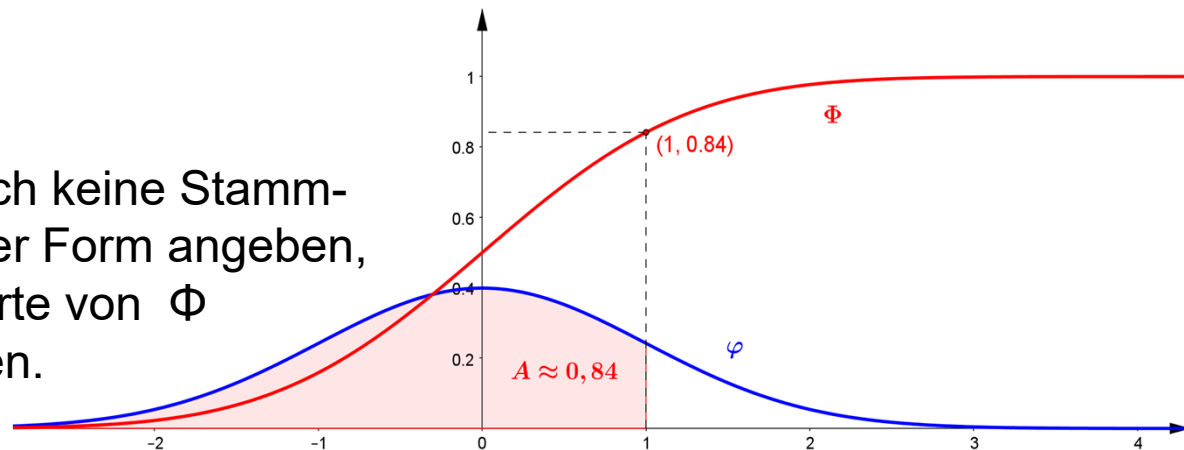
Eine stetige Zufallsgröße  $X$ , die die Gaußfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt, heißt **standardnormalverteilt** mit

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx$$

Zur Funktion  $\varphi$  lässt sich keine Stammfunktion in geschlossener Form angeben, daher kann man die Werte von  $\Phi$  nur numerisch berechnen.

Es gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \varphi(x) dx$$



M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Stetige Verteilungen – Beispiel 3

Kenngößen der Standardnormalverteilung:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x) dx = 0$$

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \varphi(x) dx} = 1$$

Kann man das berechnen?

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

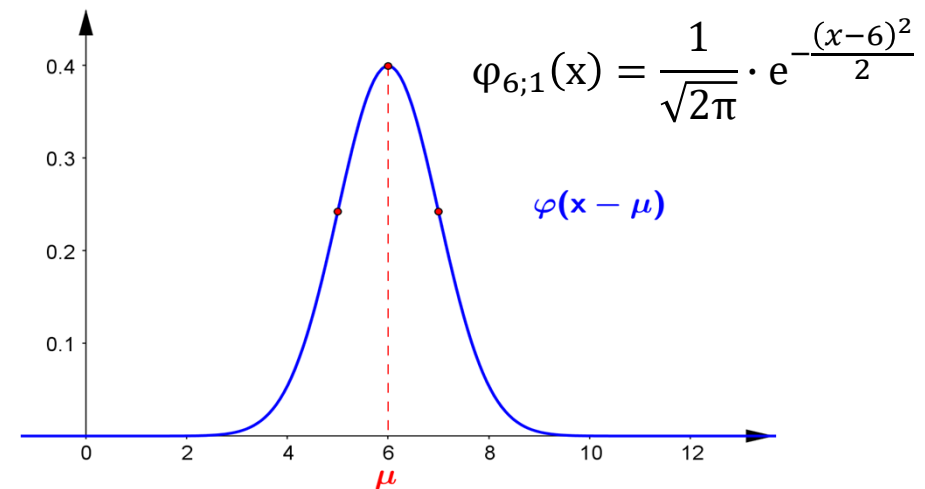
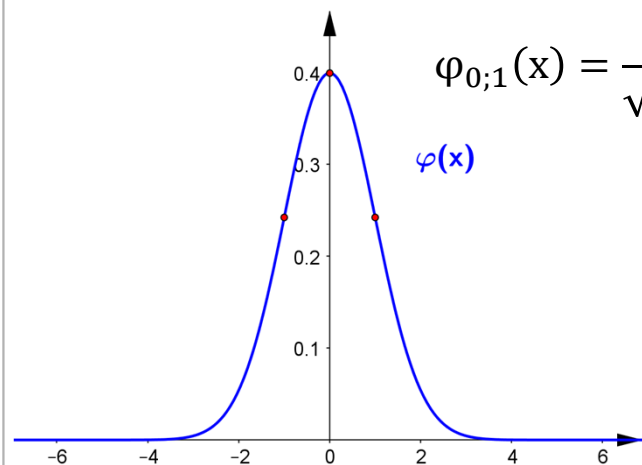
Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Die Normalverteilung

- Transformation der Standardnormalverteilung auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu beliebigen Werten von  $\mu$  und  $\sigma$
- (1) Verschiebung des Graphen von  $\varphi$  um den Wert  $\mu$  in x-Richtung



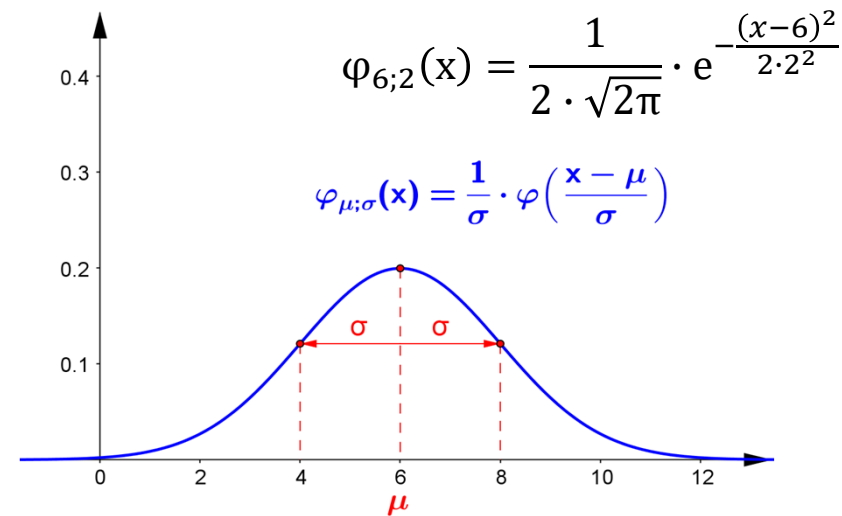
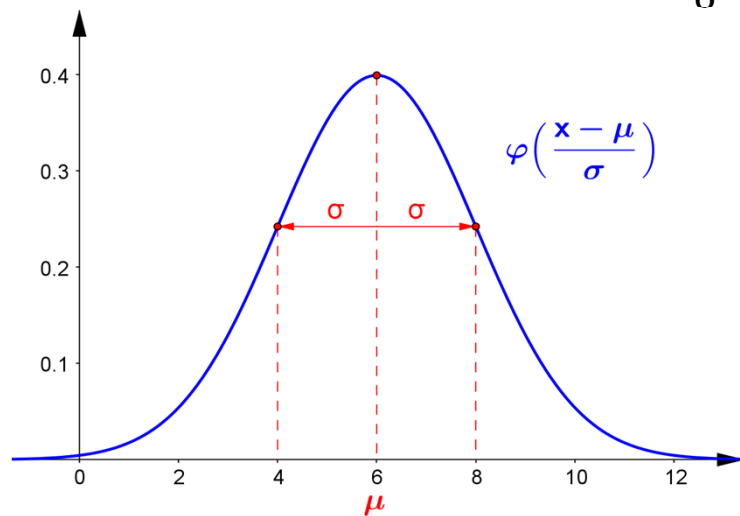


M	A	T	H	E
A	z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches	Didaktisches	Unterrichtsgang BF	Unterrichtsgang LF
------------	--------------	--------------------	--------------------

## Die Normalverteilung

- (2) Streckung des Graphen mit dem Faktor  $\sigma$  in x-Richtung und mit dem Faktor  $\frac{1}{\sigma}$  in y-Richtung.



Durch die Transformationen ändert sich der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse nicht.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Die Normalverteilung

- Eine stetige Zufallsgröße  $X$ , die eine Gaußsche Glockenfunktion  $\varphi_{\mu;\sigma}$  als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt, heißt **normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ , kurz  $N_{\mu;\sigma}$  – verteilt.**

- zugehörige Dichtefunktion  $\varphi_{\mu;\sigma}$ :

$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Es gilt

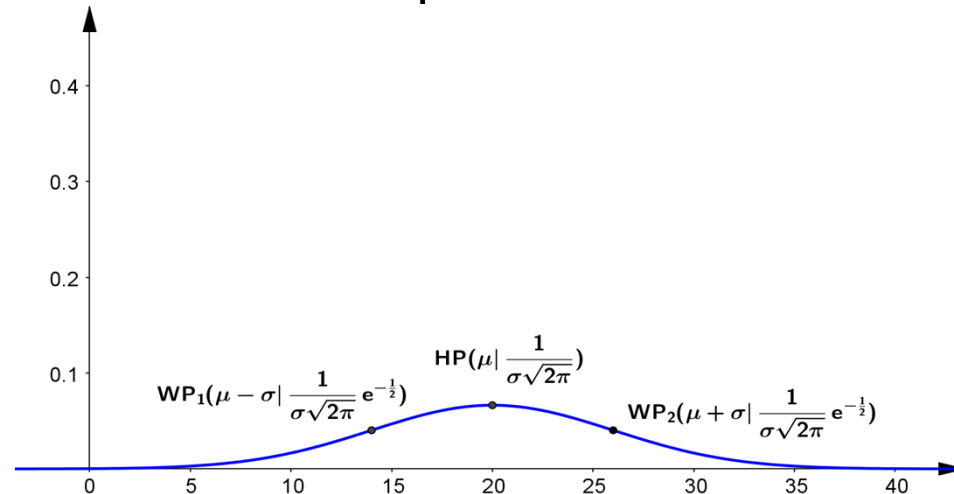
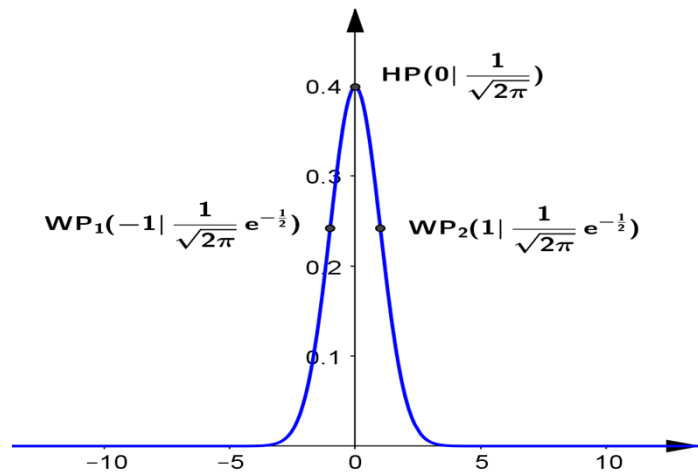
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi_{\mu;\sigma}(a) - \Phi_{\mu;\sigma}(b) = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x) dx$$

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches	Didaktisches	Unterrichtsgang BF	Unterrichtsgang LF
------------	--------------	--------------------	--------------------

## Die Analysis der Glockenfunktion

- Die Graphen der Funktion  $\varphi_{\mu;\sigma}$  sind achsensymmetrisch zur Geraden  $x = \mu$ .
- Sie besitzen einen Hochpunkt und zwei Wendepunkte.



# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Standardisierung

- Eine Zufallsgröße heißt **standardisiert**, wenn  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ .
- Eine normalverteilte Zufallsgröße  $X$  mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  lässt sich mit den o.g. Transformationen in umgekehrter Reihenfolge standardisieren.
- Die Zufallsgröße  $X^*$  mit  $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$  ist standardnormalverteilt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  lässt sich auf die von  $X^*$  zurückführen.

$$\Phi_{\mu;\sigma}(z) = \Phi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)$$

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Binomial- und Normalverteilung

- Die Histogramme einer binomialverteilten Zufallsgröße werden für wachsendes  $n$  bei konstantem  $p$  breiter und nahezu symmetrisch um den Erwartungswert.
- Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse werden immer kleiner, da die Flächensumme der Rechtecke immer die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 ergibt.
- Die Histogramme erhalten zunehmend Glockenform, wobei sich  $\mu = n \cdot p$  immer weiter nach rechts verschiebt.

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

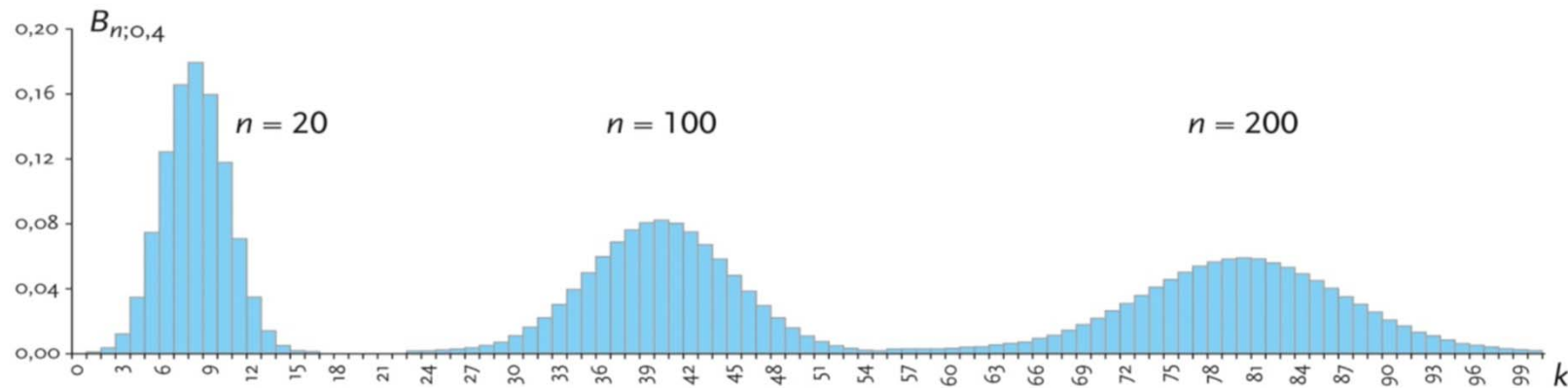
Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Binomial- und Normalverteilung



Untersuchung des Verhaltens von  $B_{n;p}$  für große Werte von  $n$

- (1) Verschieben des Schaubilds, so dass der Erwartungswert  $\mu = n \cdot p$  auf der  $y$ -Achse liegt.
- (2) Strecken der Rechteckhöhen mit dem Faktor  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
- (3) Strecken der Rechteckbreiten mit dem Faktor  $\frac{1}{\sigma}$

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Binomial- und Normalverteilung

- Eine solche Verteilung heißt **standardisierte Binomialverteilung**.
- **De Moivre** hat erkannt, dass die Histogramme bestimmter standardisierter Binomialverteilungen trotz unterschiedlicher Parameter  $n$  und  $p$  in guter Näherung einen fast identischen Verlauf zeigen. Diese Histogramme haben einen glockenförmigen Verlauf.
- **Laplace** hat erkannt, dass die Histogramme standardisierter Binomialverteilungen tendenziell umso besser von glockenförmigen Graphen umrandet werden, je größer die Standardabweichung  $\sigma$  ist. (Faustregel: wenn die Laplace-Bedingung  $\sigma > 3$  erfüllt ist)

M	A	T	H	E
A	z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Binomial- und Normalverteilung

- Das Schaubild der Gaußschen Glockenfunktion  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

liefert die Grenzkurve.

- Die Summenwahrscheinlichkeit  $P(X \leq k) = B_{n;p}(X \leq k)$  kann näherungsweise durch den Inhalt der Teilfläche, die von der Gauß-Kurve und der  $x$ -Achse im Intervall  $(-\infty; z]$  eingeschlossen wird, berechnet werden. Integrale Näherungsformel von **de Moivre-Laplace**:

$$B_{n;p}(X \leq k) \approx \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx \quad \text{mit } z = \frac{k - \mu}{\sigma}$$



M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Binomial- und Normalverteilung

- Mit dem WTR kann man direkt  $B_{n;p}$  mit  $\Phi_{\mu;\sigma}$  vergleichen.
- Die Intervallwahrscheinlichkeit  $P(k_1 \leq X \leq k_2)$  ist näherungsweise gleich der Differenz  $\Phi(z_2) - \Phi(z_1)$ , also gilt

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \int_{-\infty}^{z_2} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{z_1} \varphi(x) dx$$

mit  $z_1 = \frac{k_1 - \mu}{\sigma}$  und  $z_2 = \frac{k_2 - \mu}{\sigma}$

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

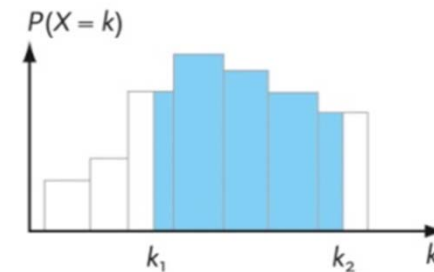
Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Binomial- und Normalverteilung – Stetigkeitskorrektur

- Um die Randrechtecke nicht nur halb mit einzubeziehen, versetzt man die Intervallgrenzen jeweils um 0,5 LE nach außen. Dadurch erhält man einen besseren Näherungswert für die Intervallwahrscheinlichkeit.



- Für die standardisierten Variablen gilt dann:

$$z_1 = \frac{k_1 - 0,5 - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{k_2 + 0,5 - \mu}{\sigma}$$

und für die integrale Näherung

$$B_{n;p}(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0,5 - \mu}{\sigma}\right)$$

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches	Didaktisches	Unterrichtsgang BF	Unterrichtsgang LF
------------	--------------	--------------------	--------------------

## Normalverteilung – Sigma-Regeln\*

\*Vertiefung

Für eine normalverteilte Zufallsgröße mit  $\sigma > 3$  gilt

a	$P( X - \mu  \leq a)$
$\sigma$	
$2 \cdot \sigma$	
$3 \cdot \sigma$	

$P( X - \mu  \leq a)$	a
90%	
95%	
99%	

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Normalverteilung – Sigma-Regeln\*

\*Vertiefung

Für eine normalverteilte Zufallsgröße mit  $\sigma > 3$  gilt

a	$P( X - \mu  \leq a)$
$\sigma$	68,3%
$2 \cdot \sigma$	95,5%
$3 \cdot \sigma$	99,7%

$P( X - \mu  \leq a)$	a
90%	$1,64 \cdot \sigma$
95%	$1,96 \cdot \sigma$
99%	$2,58 \cdot \sigma$

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

### Leistungsfach BP 2016 (als Interpretationshilfe) – Kopftext

Sie benutzen digitale Hilfsmittel beim Umgang mit diskreten und stetigen Verteilungen. Im Kontext der Untersuchung normalverteilter Zufallsgrößen nutzen sie ihre in der **Analysis** gewonnenen Kompetenzen.

**Grundlegend unterschiedliche Perspektive**

### Basisfach – Kopftext

Sie lernen diskret und stetig verteilte Zufallsgrößen kennen und berechnen die Werte einer ~~normalverteilten~~ Zufallsgröße ohne expliziten Bezug zur Analysis direkt mit einem **digitalen Hilfsmittel**.

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

### Leistungsfach BP 2016 (als Interpretationshilfe) – Item

(9) die **Dichtefunktion** einer normalverteilten Zufallsgröße mithilfe von Erwartungswert und **Standardabweichung** angeben und die zugehörige *Glockenkurve* skizzieren

Unterschiedliche Schwerpunkte



### Basisfach – Item

(2) Den Zusammenhang der Kennwerte *Erwartungswert* und *Standardabweichung* einer *Normalverteilung* und der zugehörigen **Glockenkurve** beschreiben.

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

Betrachtungsweise von Erwartungswert und Standardabweichung:

WTR

Im Basisfach werden diese Werte aus Datensätzen überwiegend mithilfe digitaler Hilfsmittel ermittelt.

**verstärkt  
realitätsbezogenes  
Vorgehen**

**Unterschiedliche Schwerpunkte**

$\Phi$

Im Leistungsfach erfahren die Schülerinnen und Schüler auch, dass diese Kenngrößen mithilfe von Integralen bestimmt werden können.

**Verständnis  
mathematischer Begriffe  
und Zusammenhänge**

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

### Leistungsfach BP 2016 (als Interpretationshilfe) – Item

(8) den Unterschied zwischen *diskreten* und *stetigen Zufallsgrößen* erläutern

Unterschiedliche Durchdringungstiefe

### Basisfach – Item

(1) den Unterschied zwischen *diskreten* und *stetigen Zufallsgrößen* am Beispiel *binomial-* und *normalverteilter Zufallsgrößen* beschreiben



# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches	Didaktisches	Unterrichtsgang BF	Unterrichtsgang LF
------------	--------------	--------------------	--------------------

## Wichtige Begriffe

Basisfach	Leistungsfach
Binomialverteilung als Beispiel für eine diskrete Verteilung Normalverteilung als Beispiel für eine stetige Verteilung	Binomialverteilung und Laplace-Verteilungen als Beispiele für diskrete Verteilungen Normalverteilung und weitere stetige Verteilungen (z.B. Gleichverteilung, Dreiecksverteilung, Exponentialverteilung, ...)
Normalverteilung mit Schwerpunkt auf Anwendungsaspekt	Normalverteilung auch mit Bezug zur Analysis
Erwartungswert / Standardabweichung	Erwartungswert / Standardabweichung
Glockenkurve	Gauß-Funktion; Glockenkurve Dichtefunktion

Didaktische Hinweise, Seite 7 

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Ministeriumsschreiben vom 24.10.18

Der Begriff „Standardabweichung“ ist im Umgang mit Normalverteilungen unerlässlich. Im Bildungsplan 2004 wird dieser Begriff nicht explizit genannt. Für die Abiturjahrgänge 2021 und 2022 ist somit zu beachten, dass die Schülerinnen und Schüler den Begriff der Standardabweichung beim Eintritt in die Kursstufe noch nicht kennen. Er ist jedoch erforderlich, um die inhaltsbezogene Kompetenz 3.5.5 (3) abzudecken. Die Einführung des Begriffs, das Ermitteln der Standardabweichung für einen gegebenen Datensatz gemäß der Definition und für eine binomialverteilte Zufallsvariable muss folglich im Rahmen der Thematik „Normalverteilung“ erfolgen.

**... bitte dieses Schreiben unbedingt beachten und das Vorgehen in der Fachschaft besprechen!**

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Bedeutung der digitalen Hilfsmittel

- Normalverteilung als Näherung für binomialverteilte Zufallsgrößen im Unterricht in erster Linie von historischer Bedeutung.
- Leistungsfach:  
Verständnis für Algorithmen der Hilfsmittel durch Kenntnis der Dichtefunktion und Bezug zur Analysis
- Basisfach:  
nicht ausschließlich „Blackbox“, sondern Zusammenhang zwischen Fläche unter der Glockenkurve und Wahrscheinlichkeit

Anleitungen im Material

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

- Fachliches
- Didaktisches
- Unterrichtsgang BF
- Unterrichtsgang LF

## Eingangsgedanken

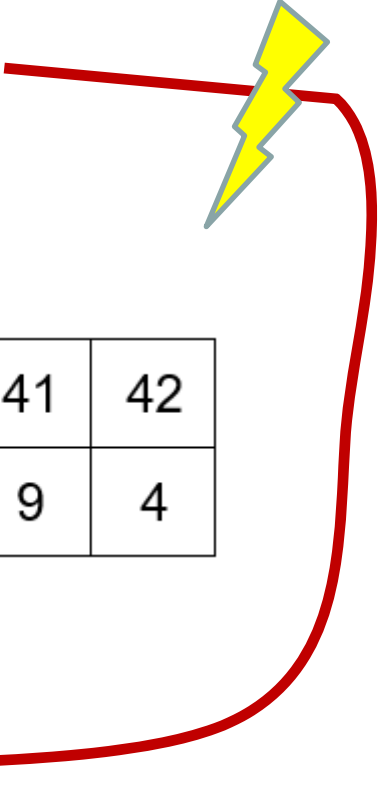
Vorwissen: „Binomialverteilung = Treffer oder Nichttreffer“

Was bedeutet hier Treffer?

Schuhgröße	35	36	37	38	39	40	41	42
Anteil in %	3	8	15	22	23	16	9	4

Binomialverteilung passt hier nicht:  $P(X = 38) \neq B_{n;p}(38)$

Aber die Normalverteilung!



# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Möglicher Unterrichtsgang im Basisfach

### 5. Aufgabenstellungen im Basisfach

Grundlegend:

- Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen erläutern (am Beispiel Binomial- und Normalverteilung)
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einer Glockenkurve ablesen
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einem (gegebenen) Datensatz ermitteln
  - bei kleinen Datenmengen „händisch“
  - ansonsten mit WTR und weiteren digitalen Hilfsmitteln

Didaktische Hinweise, Seite 8

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Roter Faden

1. Es gibt diskret und stetig verteilte Zufallsgrößen.
2. Viele Datensätze lassen sich durch Glockenkurven beschreiben und können als normalverteilt angenommen werden.
3. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten können näherungsweise als Fläche unter der Glockenkurve ermittelt werden.
4. Die Form der Glockenkurve hängt von den Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung ab.
5. Erwartungswert und Standardabweichung können aus einem Datensatz ermittelt werden.

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 1 – 3 Wiederholung Binomialverteilung

- Festigung der Begriffe Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette
- Wiederholung und Anwendung der Formel von Bernoulli
- Interpretation der Trefferwahrscheinlichkeit als Fläche der Säulen des Histogramms
- Einführung des Begriffs „diskret verteilte Zufallsgröße“

Planarbeit

Infoblatt

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 4 – 5 Normalverteilung

- Vom Histogramm zur Glockenkurve
- Einführung des Begriffs „stetig verteilte Zufallsgröße“
- Wahrscheinlichkeiten anschaulich als Fläche unter der Glockenkurve interpretieren und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen nutzen

Lehrervortrag

Übungsaufgaben

Problemorientierter  
Einstieg „Tea Time“



# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 6 – 7 Erwartungswert und Standardabweichung

- Zusammenhang Erwartungswert und Standardabweichung mit Form und Lage der Glockenkurve
  - grundlegendes und erweitertes Niveau  
(mögliche Vertiefung: Funktionsgleichung in konkreten Fällen)
- Erwartungswert und Standardabweichung ermitteln
  - mithilfe der Definition (händisch)
  - mithilfe des WTR

Entdeckendes  
Lernen

Planarbeit

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

8 – 11 Anwendungen

Gewichtsklassen bei Eiern

Schuhgrößen

Körpergrößen

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Möglicher Unterrichtsgang im Leistungsfach

### 4. Aufgabenstellungen im Leistungsfach

Grundlegend:

- Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen erläutern
- Überprüfen, ob eine Dichtefunktion vorliegt
- Dichtefunktionen durch Berechnung von Parametern bestimmen
- Zusammenhang zwischen einer Verteilungsfunktion und der zugehörigen Dichtefunktion untersuchen

Didaktische Hinweise, Seite 7

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Roter Faden des Unterrichtsgangs

- Ggf. Wiederholung diskreter Verteilungen
- Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und Wahrscheinlichkeiten
- Zentrale Begriffe stetiger Verteilungen mit Beispielen
- Vernetzung mit der Analysis, insbesondere mit der Integralrechnung
- Motivation der Gaußschen Glockenkurve durch Simulationen
- Definition und innermathematische Untersuchung der Normalverteilung
- Satz von de Moivre – Laplace

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 0 Diskrete Verteilungen

- Wdh. Laplace-Experimente und Begriffseinführung „Gleichverteilung“
- ggf. Aufgreifen des Vorwissens zur [Binomialverteilung](#), falls nicht unmittelbar davor Hypothesentest behandelt wurde

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 1 – 2 Zufallsgröße bei einer Zielscheibe

- [Handlungsorientierter Einstieg](#) in das Thema „stetige Verteilungen“
- [Simulation](#) des Experiments „Zielscheibe“
- Überleitung zur [Dichtefunktion](#)
- Wahrscheinlichkeiten als Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion interpretieren

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 3 – 4 Einige stetige Verteilungen

- Zufallszahl (Gleichverteilung)
- Summe zweier Zufallszahlen (Dreiecksverteilung)
- Wartezeitprobleme (Exponentialverteilung)
- ...

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 5 – 6 Erwartungswert und Standardabweichung

- Erwartungswert: 
$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$
- Standardabweichung: 
$$\sigma = \int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$
- Exakte Berechnung der Kenngrößen für [Dreiecksverteilung](#) möglich
- Kenngrößen für Exponentialverteilung entweder [näherungsweise](#) oder exakt mittels partieller Integration (Vertiefung)
- [Aufgaben](#)



# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 7 – 10 Normalverteilung

- Summe von 3 Zufallszahlen, dann Summe von 20 Zufallszahlen

- Die Gaußsche Glockenfunktion: 
$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Normiertheit der Glockenfunktion
- Analysis der Glockenfunktion
- Aufgaben

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 11 – 12 Satz von de Moivre – Laplace

- [Approximation](#) der Binomialverteilung
- [Integrale Näherung](#) durch die Normalverteilung
- [Aufgaben](#)

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## 13 – 16 Aufgaben

- [Aufgabenmix](#)
- [Anwendungsaufgaben](#)
- [Annähernd normalverteilte Zufallsgrößen](#)

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches	Didaktisches	Unterrichtsgang BF	Unterrichtsgang LF
------------	--------------	--------------------	--------------------

## Fazit

Basisfach	Leistungsfach
Binomialverteilung als Beispiel für eine diskrete Verteilung Normalverteilung als Beispiel für eine stetige Verteilung	Binomialverteilung und Laplace-Verteilungen als Beispiele für diskrete Verteilungen Normalverteilung und weitere stetige Verteilungen (z.B. Gleichverteilung, Dreiecksverteilung, Exponentialverteilung, ...)
Normalverteilung mit Schwerpunkt auf Anwendungsaspekt	Normalverteilung auch mit Bezug zur Analysis
Erwartungswert / Standardabweichung	Erwartungswert / Standardabweichung
Glockenkurve	Gauß-Funktion; Glockenkurve Dichtefunktion

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

*Aufbau Material*

## I Fachliche Grundlagen

### Normalverteilung – Fachliche Grundlagen

A	Z	H		
T	P	T		
H	G	A		
E	H	T	A	M

#### 1. Diskrete Verteilungen

Diskrete Zufallsgrößen sind Zufallsgrößen, deren Werte endlich oder abzählbar unendlich sind und durchnummeriert werden können. Ihre Wahrscheinlichkeiten kann man in Tabellen oder anschaulich mit Histogrammen darstellen.

Die Zufallsgröße  $X$  besitzt den Erwartungswert

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i),$$

für die Varianz  $V(X)$  und die Standardabweichung  $\sigma$  gelten

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

und

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}.$$

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

*Aufbau Material*

## II Didaktische Hinweise

### Normalverteilung – didaktische Hinweise

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

#### I. Grundlagen

Die Thematik der Normalverteilung bildet chronologisch betrachtet den Abschluss des Teilgebiets Stochastik in der Schulmathematik. Die Schülerinnen und Schüler sammeln bereits in den Klassenstufen 5/6 erste Erfahrungen auf diesem Gebiet, in dem sie die Kenngrößen Mittelwert, Minimum und Maximum bestimmen, Daten sammeln, auswerten und grafisch darstellen, sowie relative Häufigkeiten ermitteln.

In den Klassenstufen 7/8 lernen sie mit Median und den Quartilen weitere Kenngrößen kennen und ergänzen ihr Spektrum an Darstellungsmöglichkeiten durch Boxplots. Sie erfahren die Bedeutung des Gesetzes der großen Zahlen und legen so die Grundlagen für einen empirischen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Die Schülerinnen und Schüler führen Zufallsexperimente durch und bestimmen Wahrscheinlichkeiten durch einfache kombinatorische oder theoretische Überlegungen und mithilfe von Baumdiagrammen. So wird die theoretische Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs angelegt und Laplace-Experimente sind das erste ex-

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

*Aufbau Material*

## III Unterrichtsgang Basisfach

- 1 Beschreibung des Unterrichtsgangs
- 2 Arbeitsblätter mit Lösungen
- 3 Aufgaben mit Lösungen

Weitere Aufgaben im  
Fundus MAP

# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

## Aufbau Material

### IV Unterrichtsgang Leistungsfach

- 1 Beschreibung des Unterrichtsgangs
- 2 Arbeitsblätter mit Lösungen
- 3 Aufgaben mit Lösungen
- 4 GeoGebra Dateien

Weitere Aufgaben im  
Fundus SAP



# Kurstufe ab 2019 – Die Normalverteilung

M	A	T	H	E
A	Z			H
T	P			T
H	G			A
E	H	T	A	M

Fachliches

Didaktisches

Unterrichtsgang BF

Unterrichtsgang LF

*Aufbau Material*

## V WTR Hinweise

Hinweise zum WTR-Einsatz (TI-30X Plus MathPrint)

Hinweise zum WTR-Einsatz (CASIO FX-87DE X)