

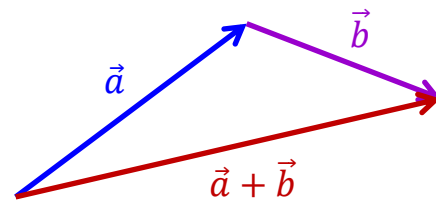
Begründungsbasis von

Inhaltsverzeichnis

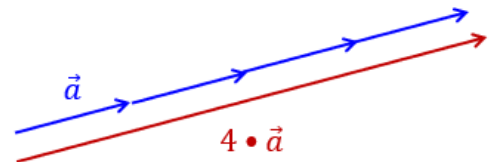
Rechenregeln für Vektoren	KI. 10	1
Betrag eines Vektors		2
Kollineare Vektoren		3
Definition des Skalarproduktes	Kursstufe	4
Rechenregeln für das Skalarprodukt		5
Skalarprodukt und Orthogonalität		6
Skalarprodukt und Winkel		7
Geschlossene Vektorkette		8
Definition des Vektorprodukts		9
Vektorprodukt und Winkel		10
Rechenregeln für das Vektorprodukt		11

Rechenregeln für Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Assoziativgesetze: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$$(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$$

Distributivgesetze:

$$(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$$

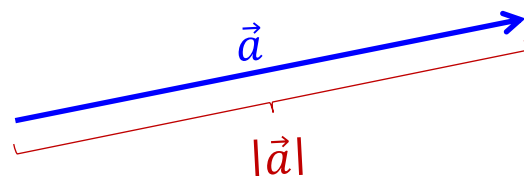
$$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

1

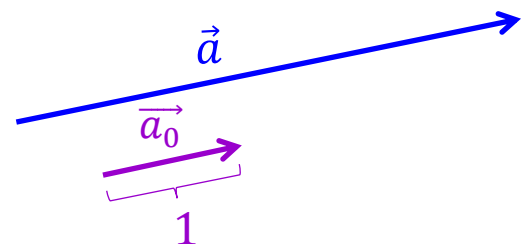
Betrag eines Vektors

Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors entspricht der Länge eines zugehörigen Vektorpfeils. Der Einheitsvektor \vec{a}_0 von \vec{a} hat die gleiche Richtung wie \vec{a} und den Betrag 1. Es gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \cdot \vec{a}$$



Weiterhin gilt:

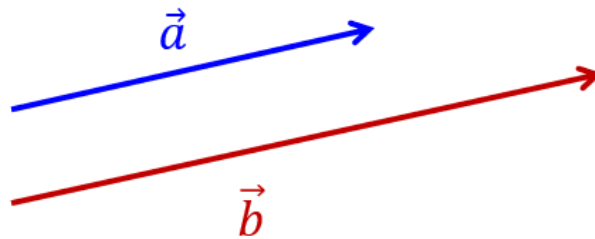
$$|\vec{a}| \geq 0 \quad ; \quad |\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$$

2

Kollineare Vektoren

Die Pfeile zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind genau dann zueinander parallel, wenn es eine reelle Zahl t gibt, so dass gilt: $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$.



3

Definition des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine reelle Zahl.

Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

4

Rechenregeln für das Skalarprodukt

Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Assoziativgesetz: $r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$

Spezialfall: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}|$

Vorsicht: Das Assoziativgesetz für drei Vektoren gilt nicht:

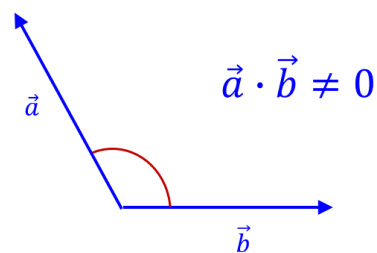
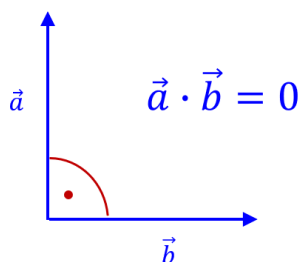
$$\underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}}_{\substack{\text{Vielfaches} \\ \text{von } \vec{c}}} \neq \underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})}_{\substack{\text{Vielfaches} \\ \text{von } \vec{a}}}$$

5

Skalarprodukt und Orthogonalität

Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$



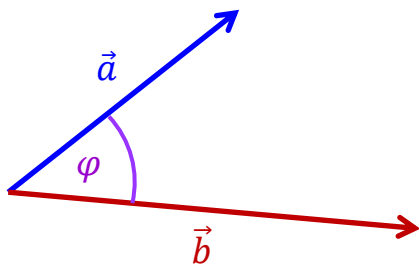
6

Skalarprodukt und Winkel

Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} .



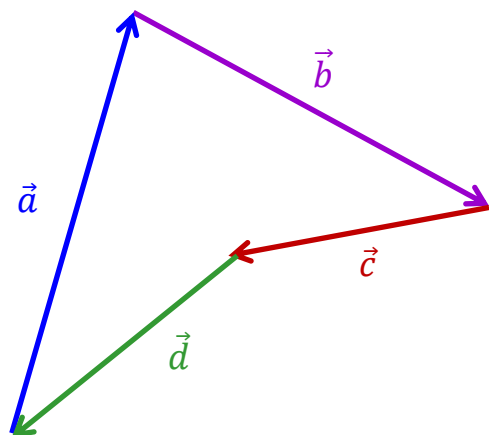
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

7

Geschlossene Vektorkette

Die Summe mehrerer Vektoren ist genau dann gleich dem Nullvektor, wenn sich Repräsentanten dieser Vektoren zu einer geschlossenen Vektorkette anordnen lassen.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$



8

Definition des Vektorprodukts

Das Vektorprodukt (bzw. Kreuzprodukt) zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist ein Vektor. Es gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

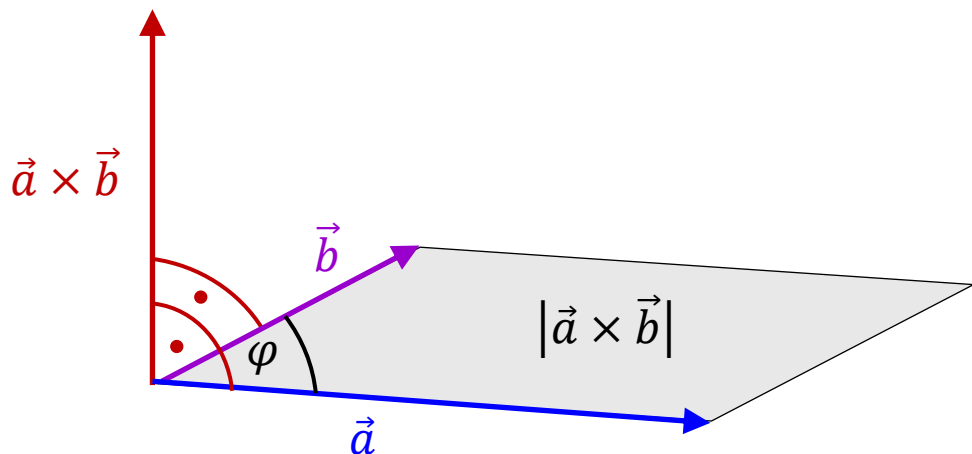
9

Vektorprodukt und Winkel

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu \vec{a} und senkrecht zu \vec{b} .

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} so gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



10

Rechenregeln für das Vektorprodukt

Nichtkommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Spezialfall: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$