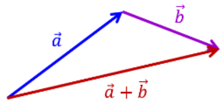
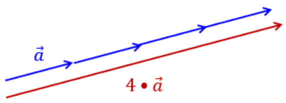
Begründungsbasis Vektoren

Rechenregeln für Vektoren

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$



$$r\cdot\vec{a}=r\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cdot a_1\\r\cdot a_2\\r\cdot a_3\end{pmatrix}$$



Kommutativgesetz: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Assoziativgesetze: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$(r\cdot s)\cdot\vec{a}=r\cdot(s\cdot\vec{a})$

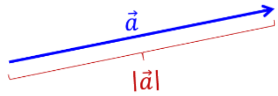
Distributivgesetze: $(r+s)\cdot\vec{a}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{a}$

$r\cdot(\vec{a}+\vec{b})=r\cdot\vec{a}+r\cdot\vec{b}$

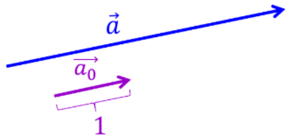
Betrag eines Vektors

Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors entspricht der Länge eines zugehörigen Vektorpfeils. Der Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ von $\vec{a}$ hat die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ und den Betrag 1. Es gilt:

$$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$$



$$\overrightarrow{a_0}=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}}\cdot\vec{a}$$



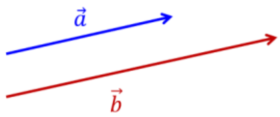
Weiterhin gilt:

$|\vec{a}|\geq 0$; $|\vec{a}|=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$|r\cdot\vec{a}|=|r|\cdot|\vec{a}|$

Kollineare Vektoren

Die Pfeile zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander parallel, wenn es eine reelle Zahl t gibt, so dass gilt: $\vec{a}=t\bullet\vec{b}$.



Definition des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine reelle Zahl.

Es gilt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt

Kommutativgesetz: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

Assoziativgesetz: $r\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(r\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}$

Spezialfall: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|$

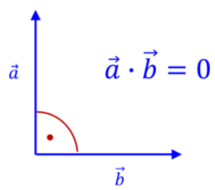
Vorsicht:
Das Assoziativgesetz für drei Vektoren gilt nicht:

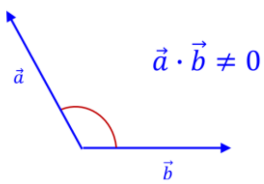
$$\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}}_{\substack{Vielfaches\\von\ \vec{c}}}\neq\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})}_{\substack{Vielfaches\\von\ \vec{a}}}$$

Skalarprodukt und Orthogonalität

Für $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $\vec{b}\neq\vec{0}$ gilt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$$



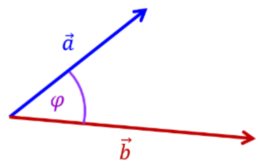


Skalarprodukt und Winkel

Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi)$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

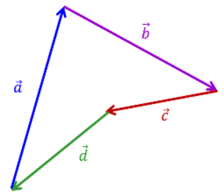


$$cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Geschlossene Vektorkette

Die Summe mehrerer Vektoren ist genau dann gleich dem Nullvektor, wenn sich Repräsentanten dieser Vektoren zu einer geschlossenen Vektorkette anordnen lassen.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

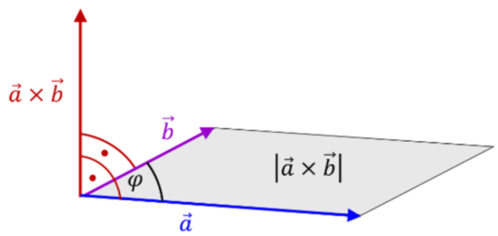


Vektorprodukt und Winkel

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{b}$.

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\varphi)$$



Definition des Vektorprodukts

Das Vektorprodukt (bzw. Kreuzprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor. Es gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für das Vektorprodukt

Nichtkommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Spezialfall: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$