**Vektorielle Beweise mit gestuften Hilfen (1)**

Beweisen Sie möglichst viele der folgenden Zusammenhänge. Dabei stehen Ihnen folgende Hilfen zur Verfügung:

*Hilfekarten:*

*Die Hilfekarten helfen Ihnen Schritt für Schritt beim Beweis weiter. Sie können – je nach Bedarf – nur eine, mehrere oder alle Hilfekarten benutzen.*

*Lückentext*

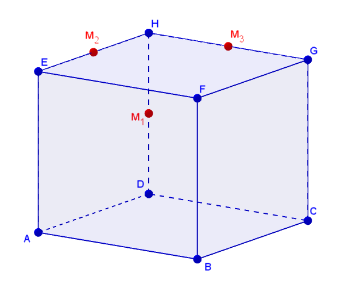
*Der Beweis ist mit einigen Lücken versehen, die von Ihnen ausgefüllt werden sollen.*

*Beweispuzzle*

*Alle Beweisschritte sind auf Karten notiert, die Sie in Ihrem Heft in die richtige Reihenfolge bringen sollen.  
Hinzufügen müssen Sie die Teilüberschriften „Einführungen von Vektoren und Bezeichnungen“, „Voraussetzung“, „Behauptung“ und „Beweis“.*

*Lösung*

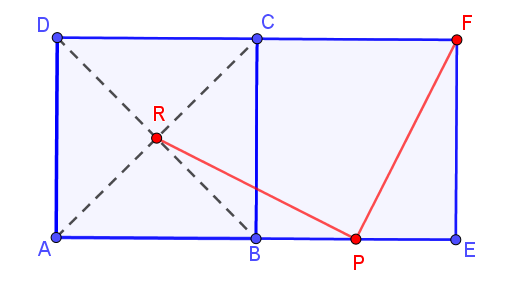
*Kommen Sie an einer Stelle nicht weiter, holen Sie sich bei Ihren Mitschülern oder beim Lehrer Hilfe, oder betrachten Sie die Lösung.*



***Aufgabe 1: Kantenmitten im Würfel***

In einem Würfel sind , und jeweils Kantenmitten im Würfel ABCDEFGH (siehe Abb.).

Beweisen Sie, dass die Strecken und zueinander orthogonal sind.



***Aufgabe 2: Strecken im Quadrat***

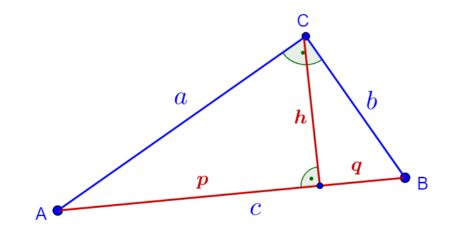
Gegeben sind zwei Quadrate mit der gemeinsamen Seite . Der Punkt ist der Mittelpunkt der Quadratseite .

Beweisen Sie, dass die Strecken und zueinander orthogonal sind.

***Aufgabe 3: Diagonalen im Parallelogramm***

Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz:

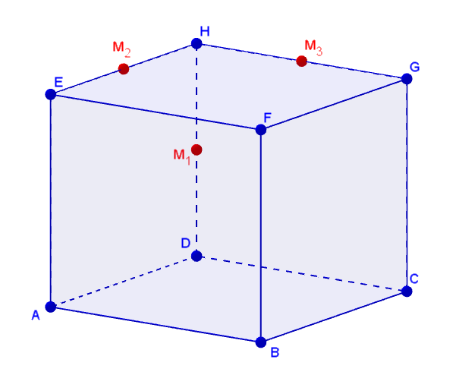
Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist das Viereck ein Parallelogramm.



***Aufgabe 4: Höhensatz des Euklid***

Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz den Höhensatz des Euklid:

Teilt in einem rechtwinkligen Dreieck die zur Hypotenuse gehörende Höhe die Hypotenuse in zwei Abschnitte und , so gilt:

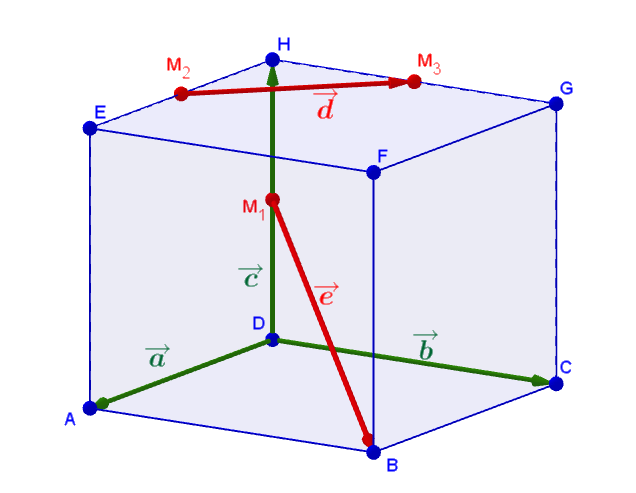
***Aufgabe 1: Kantenmitten im Würfel***

In einem Würfel sind , und jeweils Kantenmitten im Würfel ABCDEFGH (siehe Abb.).

Beweisen Sie, dass die Strecken und zueinander orthogonal sind.

***Lösung***

1. Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen

1. Voraussetzung

ABCDEFGH ist ein Würfel, d.h.

und , ,

, und sind Kantenmitten, d.h. es gilt:

1. Behauptung

1. Beweis

Demnach gilt:

Anmerkung:

Für die Orthogonalität ist entscheidend, dass gilt. Der Betrag von spielt hingegen keine Rolle. Somit gilt die Behauptung auch für Quader mit quadratischer Grundfläche.

***Aufgabe 1: Gestufte Hilfekarten***

***Hilfe 1***

Führen Sie die Vektoren , , , und ein.

Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

***Hilfe 2***

Drücken Sie die Vektoren und mithilfe von , und aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.

***Hilfe 3***

Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

.

***Aufgabe 1: Beweispuzzle***

Bringen Sie die Karten in die richtige Reihenfolge und notieren Sie - nachdem Sie eine Skizze erstellt und Vektoren eingeführt haben - Voraussetzung, Behauptung und den Beweis im Heft.

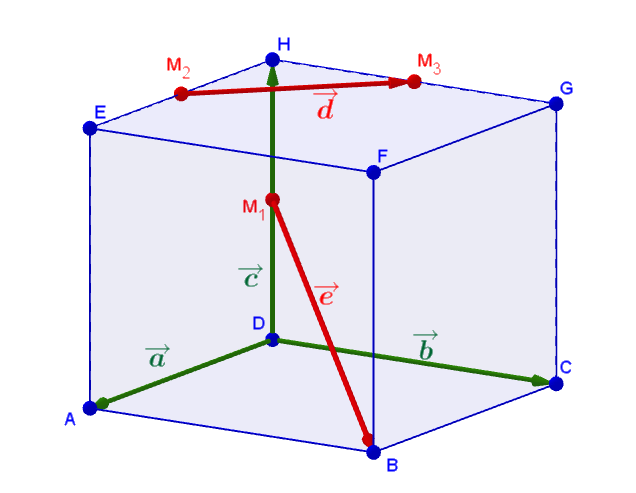
ABCDEFGH ist ein Würfel, d.h.

, und sind Kantenmitten, d.h. es gilt:

und , ,

Demnach gilt:

***Aufgabe 1: Lückentext***



Führen Sie den Beweis, indem Sie die Lücken ausfüllen.

*Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen*

*Voraussetzung*

ABCDEFGH ist ein Würfel, d.h.

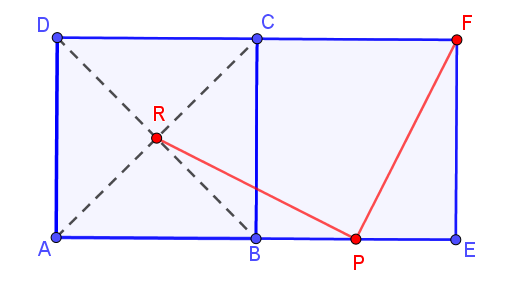
und , ,

, und sind Kantenmitten, d.h. es gilt:

*Behauptung*

*Beweis*

Demnach gilt:



***Aufgabe 2: Strecken im Quadrat***

Gegeben sind zwei Quadrate mit der gemeinsamen Seite . Der Punkt ist der Mittelpunkt der Quadratseite .

Beweisen Sie, dass die Strecken und zueinander orthogonal sind.

***Lösung***

1. Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen

Zunächst legen wir ein kartesisches Koordinatensystem fest, durch: und

1. Voraussetzung

und sind Quadrate, d.h. es gilt:

; ; ;

ist Diagonalenschnittpunkt im Quadrat , d.h. es gilt:

ist Mittelpunkt der Strecke , d.h. es gilt:

1. Behauptung

1. Beweis

Demnach gilt:

***Aufgabe 2: Gestufte Hilfekarten***

***Hilfe 1***

Führen Sie ein Koordinatensystem ein.

Wählen Sie als Ursprung den Punkt A und als Seitenlänge der Quadrate 2 LE.

***Hilfe 2***

Formulieren Sie die Voraussetzung.   
Geben Sie die Koordinaten der relevanten Punkte an.

Formulieren Sie dann die Behauptung.

***Hilfe 4***

Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

.

***Hilfe 3***

Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren und und zeigen Sie, so ihre Orthogonalität.

***Aufgabe 2: Beweispuzzle***

Bringen Sie die Karten in die richtige Reihenfolge und notieren Sie - nachdem Sie eine Skizze erstellt und Vektoren eingeführt haben - Voraussetzung, Behauptung und den Beweis im Heft.

Zunächst legen wir ein kartesisches Koordinatensystem fest, durch: und **1.**

=

Demnach gilt:

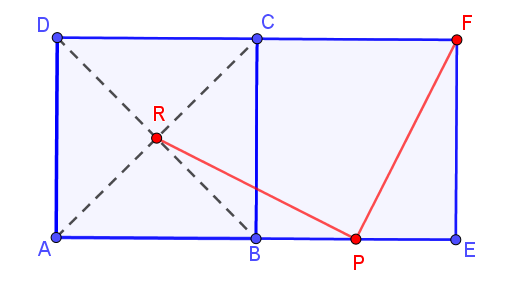
; ; ;

und sind Quadrate, d.h. es gilt:

ist Mittelpunkt der Strecke , d.h. es gilt:

ist Diagonalenschnittpunkt im Quadrat , d.h. es gilt:

***Aufgabe 2: Lückentext***



Führen Sie den Beweis, indem Sie die Lücken ausfüllen.

*Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen*

Zunächst legen wir ein kartesisches Koordinatensystem fest, durch: und .

*Voraussetzung:*

und sind \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, d.h. es gilt:

; ; ;

ist Diagonalenschnittpunkt im Quadrat , d.h. es gilt:

ist \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ der Strecke , d.h. es gilt:

*Behauptung:*

*Beweis:*

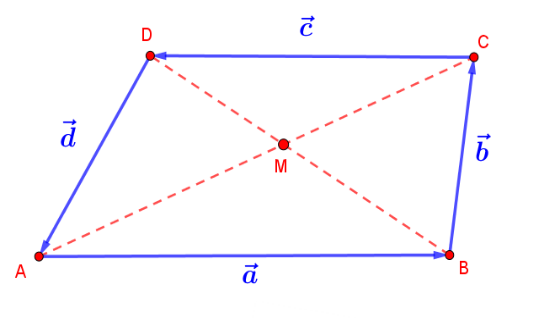
Demnach gilt:

***Aufgabe 3: Diagonalen im Parallelogramm***

Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz:

Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

**Lösung:**

****(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen:

(2) Voraussetzung:

(3) Behauptung:

(4) Beweis:

(geschlossene Vektorkette)

Da das Viereck zwei gleich lange zueinander parallele Seiten hat, ist es ein Parallelogramm.

***Aufgabe 3: Gestufte Hilfekarten***

***Hilfe 1***

Führen Sie die Vektoren , und ein und formulieren Sie die Voraussetzung und die Behauptung.

Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

***Hilfe 2***

Führen Sie die geschlossene Vektorkette

ein.

***Hilfe 3***

Drücken Sie die Vektoren der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

***Aufgabe 3: Beweispuzzle***

Bringen Sie die Karten in die richtige Reihenfolge und notieren Sie - nachdem Sie eine Skizze erstellt und Vektoren eingeführt haben - Voraussetzung, Behauptung und den Beweis im Heft.

Da das Viereck zwei gleich lange zueinander   
parallele Seiten hat, ist es ein Parallelogramm.

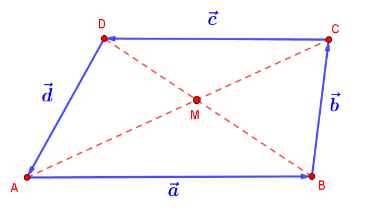
(geschlossene Vektorkette)

**3.**

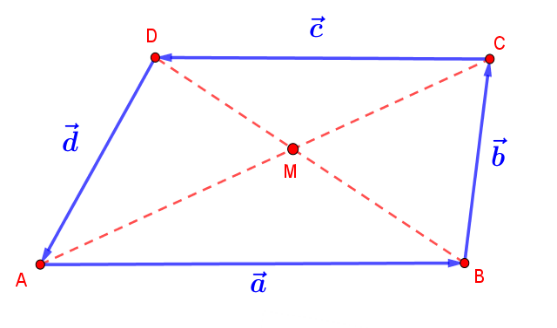
**9.**

**3.**

Einführung einer Skizze mit  
Bezeichnungen und   
Vektoren



***Aufgabe 3: Lückentext***



Führen Sie den Beweis, indem Sie die Lücken ausfüllen.

*Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen*

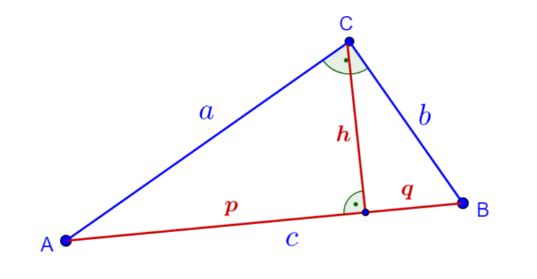
*Voraussetzung:*

*Behauptung:*

*Beweis:*

(geschlossene Vektorkette)

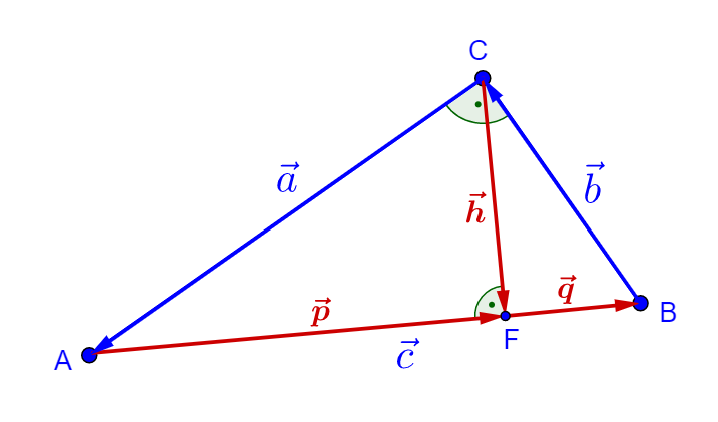
Da das Viereck zwei gleich lange zueinander \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ hat, ist es ein \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

***Aufgabe 4: Höhensatz des Euklid***

Beweisen Sie mit einem vektoriellen Ansatz den Höhensatz des Euklid:

Teilt in einem rechtwinkligen Dreieck die zur Hypotenuse gehörende Höhe die Hypotenuse in zwei Abschnitte und , so gilt:

***Lösung***

1. Skizze Einführung von Vektoren und Bezeichnungen

Wir bezeichnen den Fußpunkt des Lots von auf die Hypotenuse mit .

1. Voraussetzung

ABC ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck: und

F ist der Höhenfußpunkt:

1. Behauptung

1. Beweis

Nach Pythagoras gilt: bzw.

Mit , und erhält man:

bzw.

da

***Aufgabe 4: Gestufte Hilfekarten***

***Hilfe 1***

Bezeichnen Sie den Fußpunkt des Lots von auf die Hypotenuse mit und führen Sie sechs verschiedene Vektoren ein.

***Hilfe 2***

Formulieren Sie mit den eingeführten Vektoren die Voraussetzung und die Behauptung.

***Hilfe 3***

Notieren Sie den Satz des Pythagoras mithilfe der Vektoren , und , ohne Beträge zu verwenden.

***Hilfe 4***

Demnach gilt:

***Hilfe 5***

Ersetzen Sie die Vektoren , und durch die Vektoren , und und formen Sie ihre Gleichung so lange um, bis Sie die Behauptung erhalten.

***Hilfe 6***

Die binomischen Formeln gelten auch für Vektoren:

***Aufgabe 4: Beweispuzzle***

Bringen Sie die Karten in die richtige Reihenfolge und notieren Sie - nachdem Sie eine Skizze erstellt und Vektoren eingeführt haben - Voraussetzung, Behauptung und den Beweis im Heft.

Nach Pythagoras gilt:

F ist der Höhenfußpunkt:

und

Wir bezeichnen den Fußpunkt des Lots

von auf die Hypotenuse mit

Mit , und erhält man:

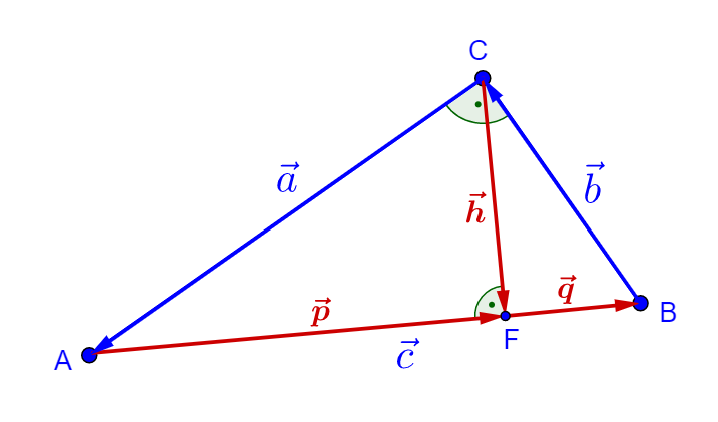
ABC ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck:

bzw.

bzw.

da

***Aufgabe 4: Lückentext***



Führen Sie den Beweis, indem Sie die Lücken ausfüllen.

*Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen*

Wir bezeichnen den Fußpunkt des Lots

von auf die Hypotenuse mit .

*Voraussetzung*

ABC ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck: und

F ist Höhenfußpunkt:

*Behauptung*

*Beweis*

Nach Pythagoras gilt: bzw.

Mit , und erhält man:

bzw.

, da

***Anleitung zur Erstellung der***

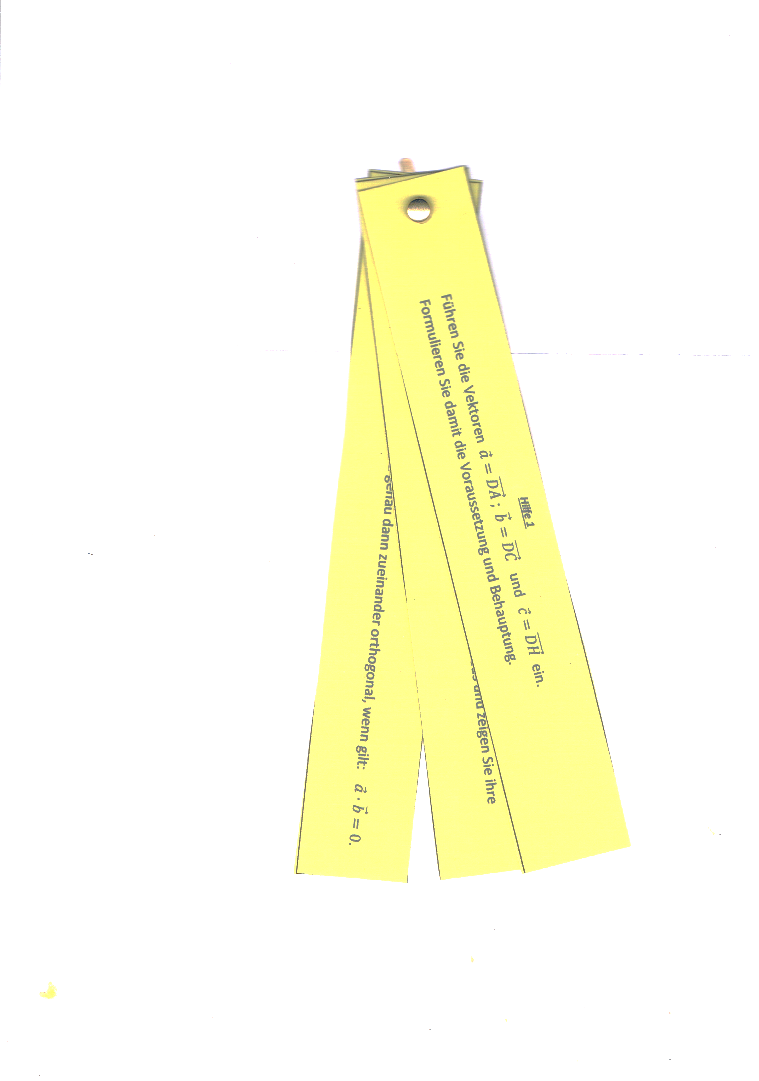
***gestuften Hilfekarten***

Auf den folgenden Seiten finden Sie gestufte Hilfekarten in zwei Varianten: Variante 1 liefert ein schöneres Ergebnis, Variante 2 schneller ist schneller zu erstellen.

***Variante 1: Beweisfächer***

Nach Aufgaben sortierte Hilfekarten.

Die Hilfekarten ausdrucken, auf verschiedenfarbiges Papier kopieren, laminieren, ausschneiden, lochen und mit einer Musterbeutelklammer zusammenstecken.



***Variante 2: Schneidemaschine***

Drucken Sie alle Seiten einmal aus und legen Sie die ausgedruckten Seiten übereinander.

Schneiden Sie mit einer Schneidemaschine entlang der markierenten Linien und legen Sie die erhaltenen Papierstapel übereinander.

Nun liegen alle Hilfekarten richtig:

Oben Hilfekarte 1-3 von Aufgabe 5, dann Hilfekarte 1-3 von Aufgabe 6 usw.

***Aufgabe 1: Gestufte Hilfekarten (Variante 1: Beweisfächer)***

***Hilfe 1***

Führen Sie die Vektoren ; und ein.

Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

***Hilfe 2***

Drücken Sie die Vektoren und mithilfe von , und aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.

***Hilfe 3***

Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

.

*①*

*①*

*①*

***Hilfe 1***

Führen Sie die Vektoren ; und ein.

Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

***Hilfe 2***

Drücken Sie die Vektoren und mithilfe von , und aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.

***Hilfe 3***

Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

.

*①*

*①*

*①*

***Hilfe 1***

Führen Sie die Vektoren ; und ein.

Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung.

***Hilfe 2***

Drücken Sie die Vektoren und mithilfe von , und aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität.

***Hilfe 3***

Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

.

*①*

*①*

*①*

***Aufgabe 2: Gestufte Hilfekarten (Variante 1: Beweisfächer)***

***Hilfe 1***

Führen Sie ein Koordinatensystem ein.

Wählen Sie als Ursprung den Punkt A und als Seitenlänge der Quadrate 2 LE.

***Hilfe 2***

Formulieren Sie die Voraussetzung.   
Geben Sie die Koordinaten der relevanten Punkte an.

Formulieren Sie dann die Behauptung.

***Hilfe 3***

Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren und und zeigen Sie so ihre Orthogonalität.

***Hilfe 4***

Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

.

*②*

*②*

*②*

*②*

***Hilfe 1***

Führen Sie ein Koordinatensystem ein.

Wählen Sie als Ursprung den Punkt A und als Seitenlänge der Quadrate 2 LE.

***Hilfe 2***

Formulieren Sie die Voraussetzung.   
Geben Sie die Koordinaten der relevanten Punkte an.

Formulieren Sie dann die Behauptung.

***Hilfe 3***

Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren und und zeigen Sie so ihre Orthogonalität.

***Hilfe 4***

Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

.

*②*

*②*

*②*

*②*

***Aufgabe 3: Gestufte Hilfekarten*** ***(Variante 1: Beweisfächer)***

***Hilfe 1***

Führen Sie die Vektoren , und ein und

formulieren die Voraussetzung und die Behauptung.

***Hilfe 2***

Führen Sie die geschlossene Vektorkette ein.

***Hilfe 3***

Drücken Sie die Vektoren der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

*③*

*③*

*③*

***Hilfe 1***

Führen Sie die Vektoren , und ein und

formulieren die Voraussetzung und die Behauptung.

***Hilfe 2***

Führen Sie die geschlossene Vektorkette ein.

***Hilfe 3***

Drücken Sie die Vektoren der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

*③*

*③*

*③*

***Hilfe 1***

Führen Sie die Vektoren , und ein und

formulieren die Voraussetzung und die Behauptung.

***Hilfe 2***

Führen Sie die geschlossene Vektorkette ein.

***Hilfe 3***

Drücken Sie die Vektoren der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung.

*③*

*③*

*③*

***Aufgabe 4: Gestufte Hilfekarten*** ***(Variante 1: Beweisfächer)***

***Hilfe 1***

Bezeichnen Sie den Fußpunkt des Lots von auf die Hypotenuse mit und

führen Sie sechs verschiedene Vektoren ein.

***Hilfe 2***

Formulieren Sie mit den eingeführten Vektoren die Voraussetzung und

die Behauptung.

***Hilfe 3***

Notieren Sie den Satz des Pythagoras mithilfe der Vektoren , und ,

ohne Beträge zu verwenden.

***Hilfe 4***

Demnach gilt: sowie

***Hilfe 5***

Ersetzen Sie die Vektoren , und durch die Vektoren , und und formen

Sie ihre Gleichung so lange um, bis Sie die Behauptung erhalten.

***Hilfe 6***

Die binomischen Formeln gelten auch für Vektoren:

*④*

*④*

*④*

*④*

*④*

*④*

|  |
| --- |
| ***Variante 2*** |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Hilfe 1***  Führen Sie die Vektoren ; und ein.  Formulieren Sie damit die Voraussetzung und Behauptung. | ***①*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 2***  Formulieren Sie die Voraussetzung. Geben Sie die Koordinaten der relevanten Punkte an. Formulieren Sie dann die Behauptung. | ***②*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 2***  Führen Sie die geschlossene Vektorkette ein. | ***③*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 3***  Notieren Sie den Satz des Pythagoras mithilfe der Vektoren , und ,  ohne Beträge zu verwenden. | ***④*** |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Hilfe 2***  Drücken Sie die Vektoren und mithilfe von , und aus und zeigen Sie ihre Orthogonalität. | ***①*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 3***  Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren und und zeigen Sie so ihre Orthogonalität. | ***②*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 3***  Drücken Sie die Vektoren der geschlossenen Vektorkette durch die zuvor eingeführten Vektoren aus und vereinfachen Sie die Gleichung. | ***③*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 4***    Demnach gilt: sowie | ***④*** |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Hilfe 3***  Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:  . | ***①*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 4***  Zwei Vektoren und sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:  . | ***②*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 1***  Bezeichnen Sie den Fußpunkt des Lots von auf die Hypotenuse mit und  führen Sie sechs verschiedene Vektoren ein. | ***④*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 5***  Ersetzen Sie die Vektoren , und durch die Vektoren , und und formen  Sie ihre Gleichung so lange um, bis Sie die Behauptung erhalten. | ***④*** |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Hilfe 1***  Führen Sie ein Koordinatensystem ein.  Wählen Sie als Ursprung den Punkt A und als Seitenlänge der Quadrate 2 LE. | ***②*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 1***  Führen Sie die Vektoren , und ein und  formulieren Sie die Voraussetzung und die Behauptung. | ***③*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 2***  Formulieren Sie mit den eingeführten Vektoren die Voraussetzung und  die Behauptung. | ***④*** |
| ***✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂*** | |
| ***Hilfe 6***  Die binomischen Formeln gelten auch für Vektoren: | ***④*** |