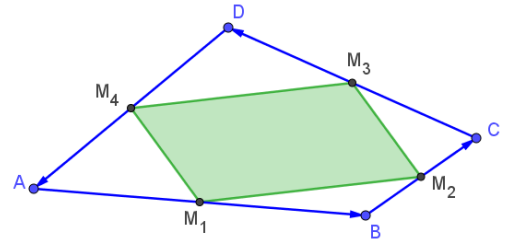


Beweise – mit und ohne Vektoren

Beweisen Sie:

Die Seitenmitten eines Vierecks ABCD bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms (Satz von Varignon).



Lösung mit Vektoren

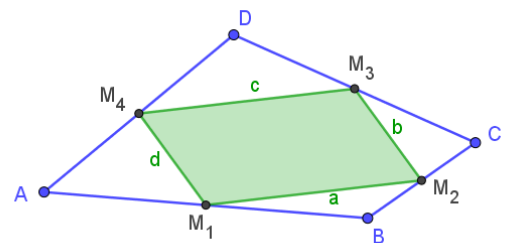
(1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen:

(2) Voraussetzung:

(3) Behauptung:

(4) Beweis:

Lösung ohne Vektoren



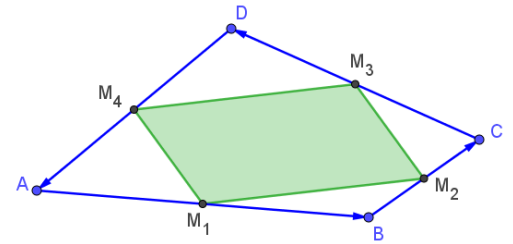
The diagram shows a triangle ABC with vertices A , B , and C . The medians AM_1 , BM_2 , and CM_3 are drawn, intersecting at the centroid M . The medians are extended to form a larger triangle $M_1M_2M_3$. The points M_4 , M_3 , M_2 , and M_1 are marked on the medians. A green shaded parallelogram is formed by the segments M_1M_2 , M_2M_3 , M_3M_4 , and M_4M_1 . The sides of this parallelogram are labeled a , b , c , and d .

Lösungen: Beweise – mit und ohne Vektoren

Lösung mit Vektoren

- (1) Skizze und Einführung von Vektoren und Bezeichnungen:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC} \quad \vec{c} = \overrightarrow{CD} \quad \vec{d} = \overrightarrow{DA}$$



- (2) Voraussetzung:

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \quad \overrightarrow{BM_2} = \frac{1}{2} \cdot \vec{b} \quad \overrightarrow{CM_3} = \frac{1}{2} \cdot \vec{c} \quad \overrightarrow{DM_4} = \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$$

- (3) Behauptung:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$$

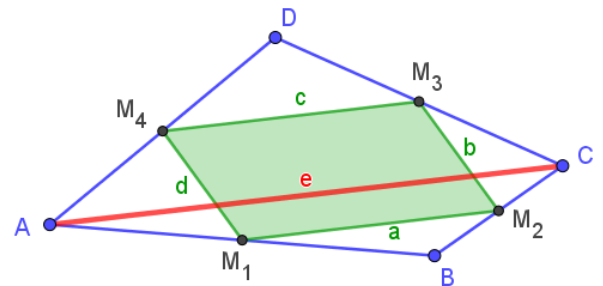
- (4) Beweis:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot (-\vec{c} - \vec{d}) = -\frac{1}{2} \vec{c} - \frac{1}{2} \vec{d} = \overrightarrow{M_4M_3}$$

Demnach ist $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm.

Lösung ohne Vektoren

Vor: M_1 , M_2 , M_3 und M_4 sind Mittelpunkte der jeweiligen Viereckseiten



Beh: $a \parallel c$ und $b \parallel d$

Bew: $a \parallel e$ (Satz von der Mittelparallelen im Dreieck ABC)

$c \parallel e$ (Satz von der Mittelparallelen im Dreieck ACD)

$\Rightarrow a \parallel c$

Zeige analog: $b \parallel d$