Die Normalverteilung

Basis- und Leistungsfach

basierend auf den Anforderungen für die schriftliche Abiturprüfung ab 2023

Groß-Schmitt, Kronberger, Mehnert, Uhl

Diskrete Verteilungen

- Werte diskreter Zufallsgrößen sind abzählbar und können durchnummeriert werden.
- Darstellung der Wahrscheinlichkeiten in Tabellen oder Histogrammen
- Die Zufallsgröße X besitzt den Erwartungswert

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

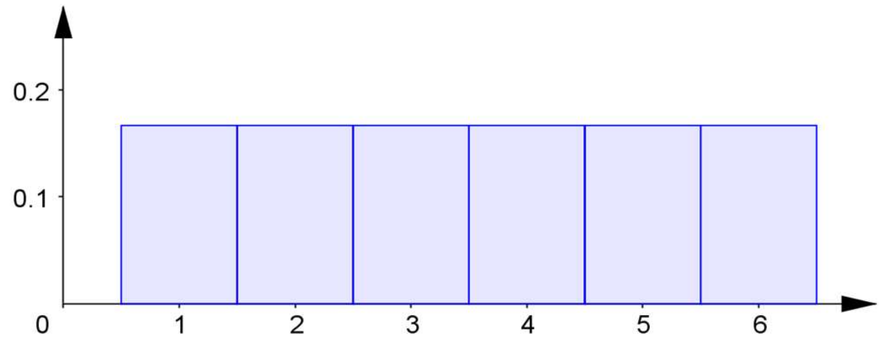
- Für die Standardabweichung σ gilt

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}$$

Diskrete Verteilungen – Beispiel 1

Einmaliges Werfen eines Würfels: die Zufallsgröße X gibt die Augenzahl an. Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



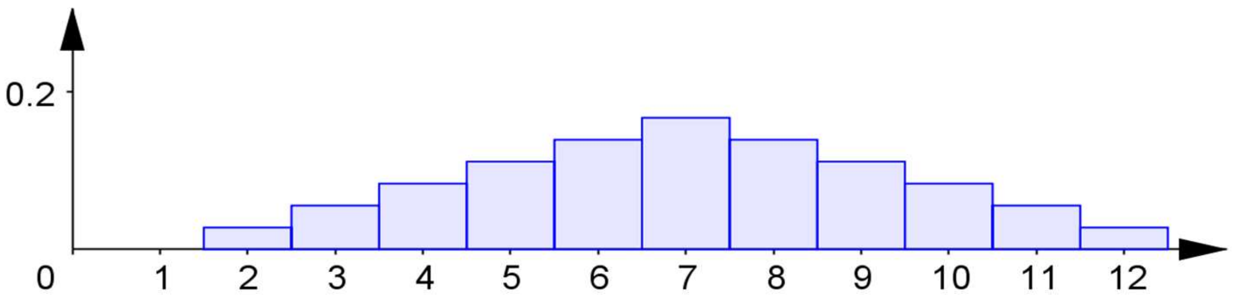
$\mu = 3{,}5$

$\sigma \approx 1{,}71$

Diskrete Verteilungen – Beispiel 2

Zweimaliges Werfen eines Würfels: die Zufallsgröße X gibt die Summe der Augenzahlen an. Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

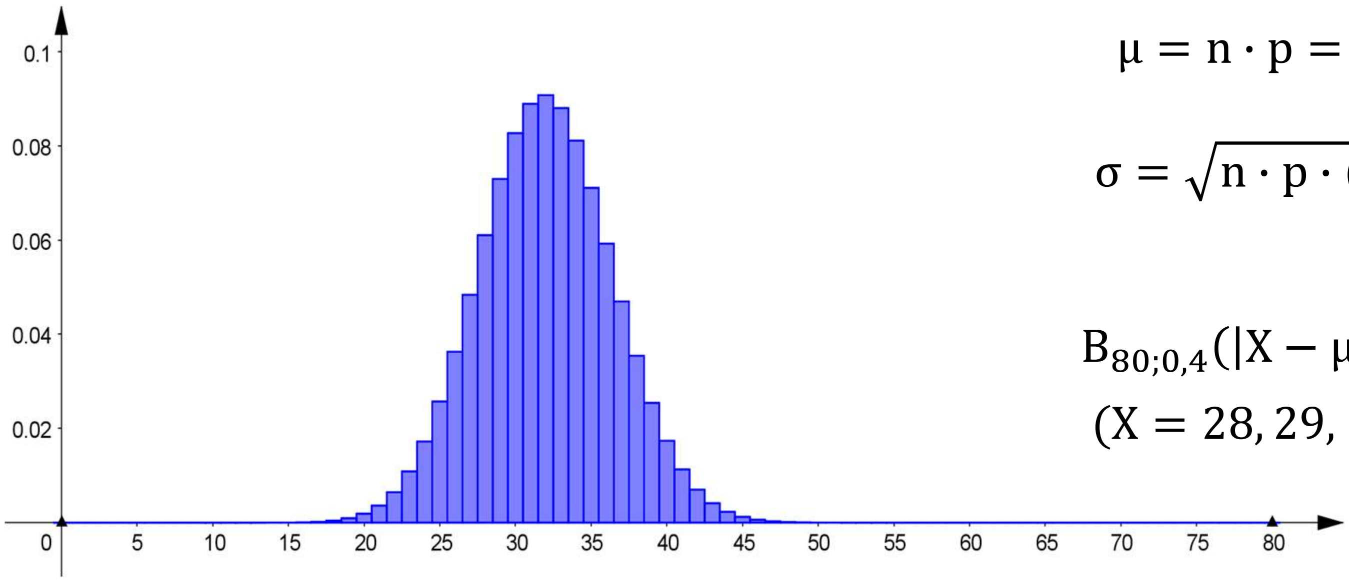


$\mu = 7$

$\sigma \approx 2{,}42$

Diskrete Verteilungen – Beispiel 3

<u>Binomialverteilung</u> mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Länge n; die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an, z.B. $n = 80$ und $p = 0{,}4$.



$$\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}4 = 32$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 4{,}38$$

$$B_{80;0,4}(|X - \mu| \le \sigma) \approx 0{,}696$$

$$(X = 28, 29, \dots, 35 \text{ oder } 36)$$

Stetige Verteilungen

- Wertebereiche stetiger Zufallsgrößen können Intervalle sein.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X wird mit Hilfe der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet.
- **Definition**:
  Eine integrierbare Funktion f heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte** über einem Intervall I $(\mathrm{I} = [a;b]$ oder $\mathrm{I} = (a;b)$), wenn gilt:

$$(1) \quad f(x) \geq 0 \ \text{ für alle } x \text{ aus I}$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x)dx = 1 \quad \left(\text{falls } \mathrm{I} = \mathbb{R}: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\right).$$

Stetige Verteilungen

Eine **Zufallsgröße X**, die Werte aus dem Intervall I annimmt, heißt **stetig verteilt** mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f, wenn für alle r_1, r_2 aus I gilt:

$$P(r_1 \leq X \leq r_2) = \int_{r_1}^{r_2} f(x)dx\ .$$

Die Funktion **F** mit

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

heißt **Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X .

Stetige Verteilungen

Weiter legt man in Anlehnung an die Definition im diskreten Fall fest:

Erwartungswert von X:

$$\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

Standardabweichung von X:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx}$$

Stetige Verteilungen – Arbeitsauftrag

(1) Zeigen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+, \lambda \in \mathbb{R}^+$ ein Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

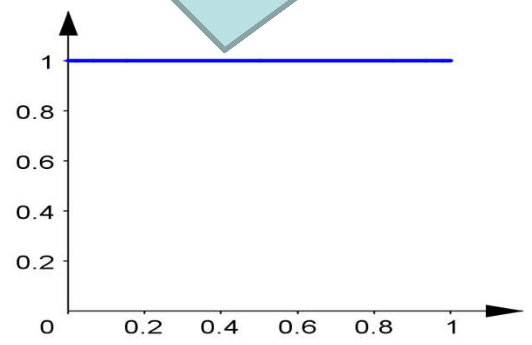
(2) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der zugehörigen Zufallsgröße X.

(3) Bestimmen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.

Beachte:
Die Funktionswerte
$\mathbf{f(x)}$ sind keine
Wahrscheinlichkeiten

Stetige Verteilungen – Beispiel 1

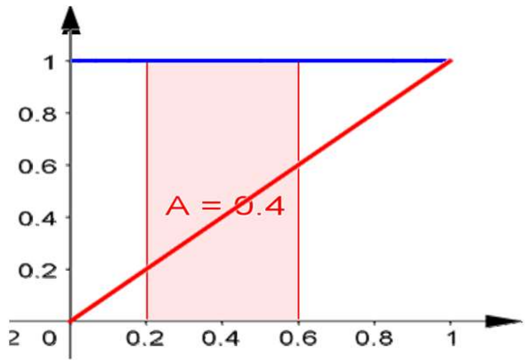
<u>Gleichverteilung</u>: Die Zufallsgröße X beschreibt eine Zufallszahl im Intervall $I = [0; 1]$.



Wahrscheinlichkeitsdichte f mit $f(x) = 1;\ 0 \leq x \leq 1$

Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls $[0{,}2; 0{,}6]$:

$$P(0{,}2 \leq X \leq 0{,}6) = \int_{0,2}^{0,6} 1dx = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$$



kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung:

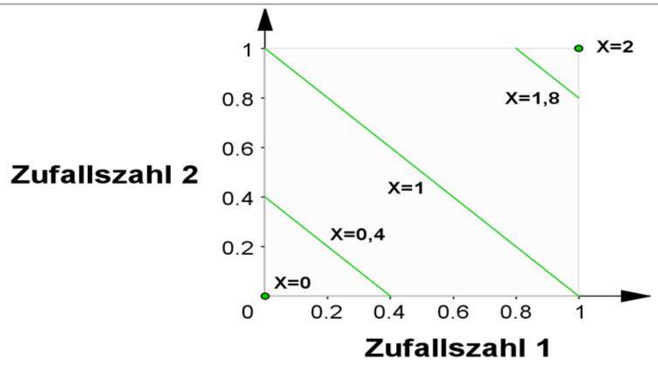
$$P(X \leq z) = \int_{0}^{z} f(x)dx$$

Kursstufe ab 2021 – Die Normalverteilung

Fachliches | Didaktisches | Unterrichtsgang BF | Unterrichtsgang LF

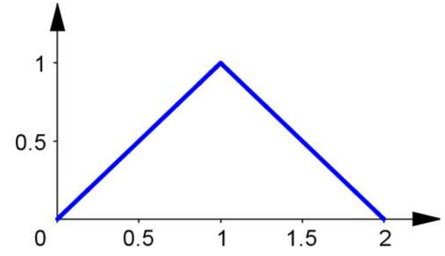
Stetige Verteilungen – Beispiel 2

<u>Summe zweier Zufallszahlen</u>:
Die Zufallsgröße X gibt die Summe aus zwei Zufallszahlen zwischen 0 und 1 an.



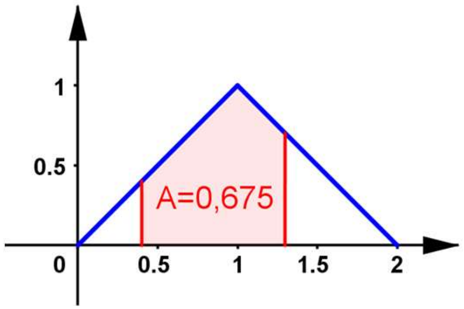
Wahrscheinlichkeitsdichte f mit:

$$f(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x \le 1 \\ 2 - x & ,1 < x \le 2 \end{cases}$$



Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls $[0,4;\, 1,3]$:

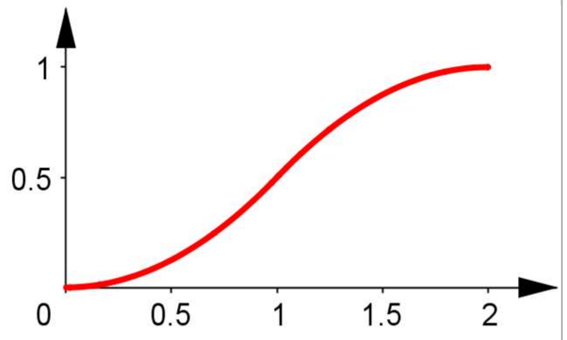
$$P(0,4 \le X \le 1,3) = \int_{0,4}^{1,3} f(x)dx = 0,675$$



Stetige Verteilungen – Beispiel 2

kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(0 \le X \le b) = \begin{cases} 0{,}5b^2, & 0 \le b \le 1 \\ -0{,}5(2-b)^2 + 1, & 1 < b \le 2 \end{cases}$$



Kenngrößen:

$$\mu = E(X) = \int_0^2 x \cdot f(x)dx = 1$$

$$\sigma = \sqrt{\int_0^2 (x-1)^2 \cdot f(x)dx} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}41$$

Stetige Verteilungen – Beispiel 3

Kann man das berechnen?

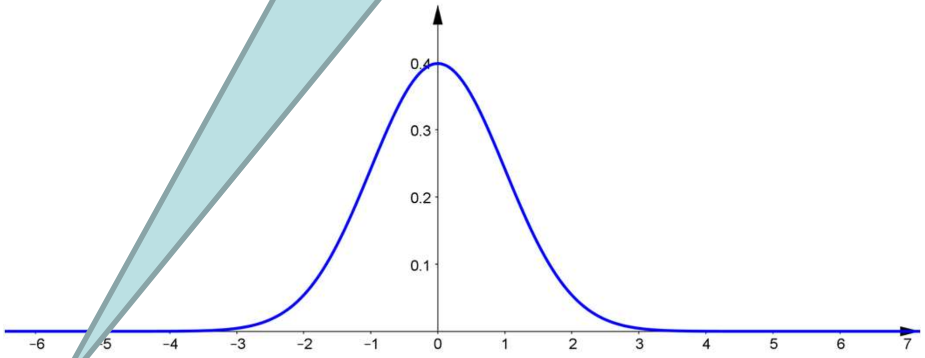
<u>Die Gaußsche Glockenfunktion</u>:

Die Gaußfunktion

$$\varphi \text{ mit } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

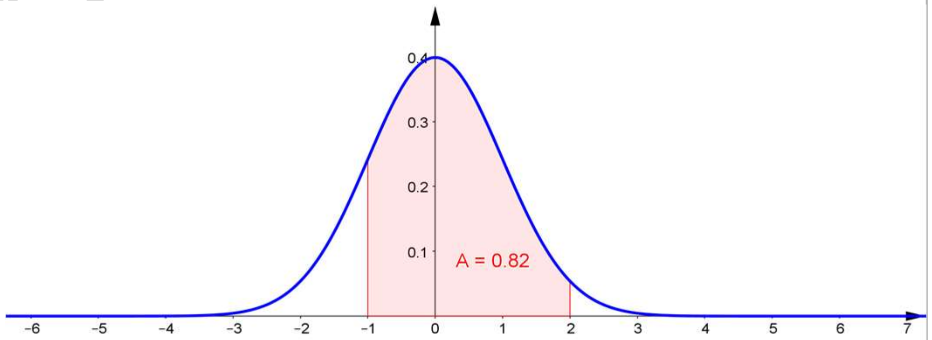
erfüllt die Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

$$(1)\ \varphi(x) \geq 0 \qquad (2) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$$



Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls $[-1; 2]$:

$$P(-1 \leq X \leq 2) = \int_{-1}^{2} \varphi(x)dx \approx 0{,}82$$

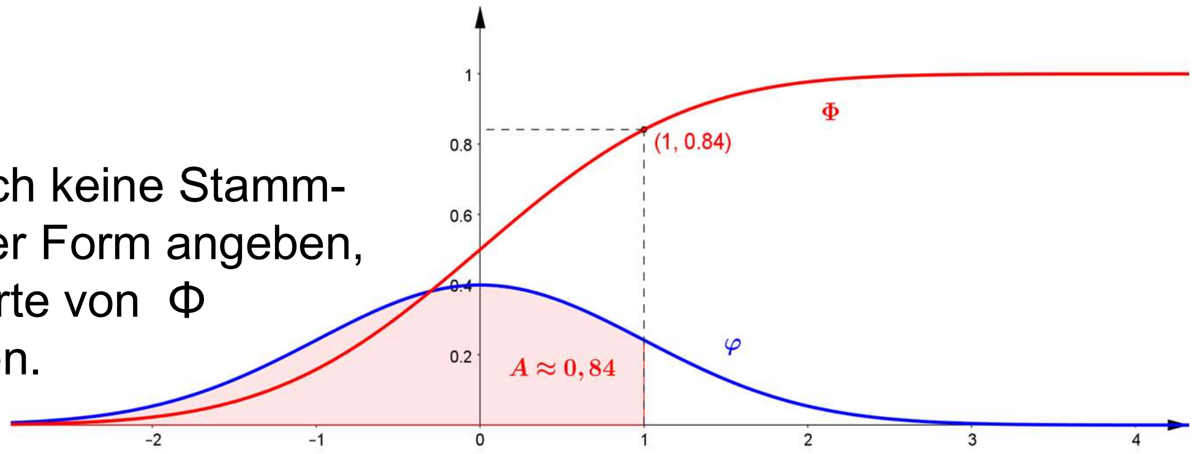


Stetige Verteilungen – Beispiel 3

Eine stetige Zufallsgröße X, die die Gaußfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt, heißt **standardnormalverteilt** mit

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)dx$$

Zur Funktion φ lässt sich keine Stammfunktion in geschlossener Form angeben, daher kann man die Werte von Φ nur numerisch berechnen.



Es gilt:

$$P(a \le X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_{a}^{b} \varphi(x)dx$$

Stetige Verteilungen – Beispiel 3

Kenngrößen der Standardnormalverteilung:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)dx = 0$$

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx} = 1$$

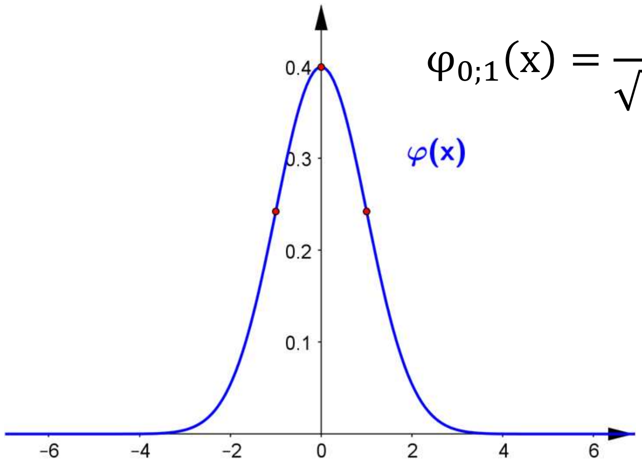
Kann man das berechnen?

Die Normalverteilung

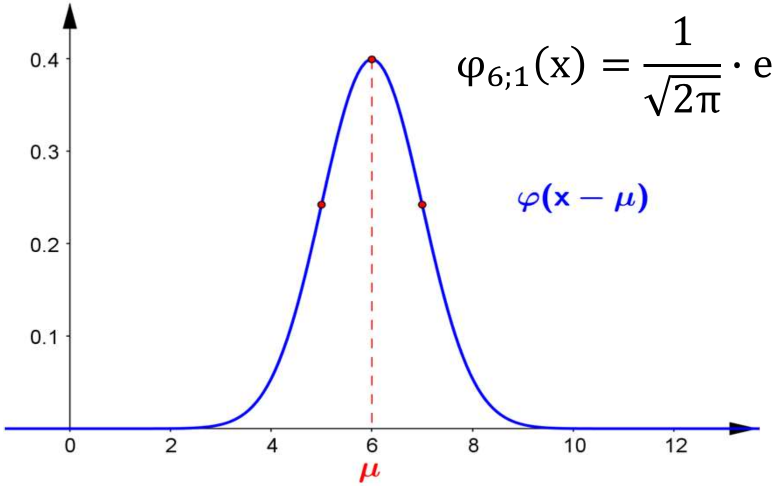
- Transformation der Standardnormalverteilung auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu beliebigen Werten von μ und σ

- (1) Verschiebung des Graphen von φ um den Wert μ in x-Richtung

$$\varphi_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

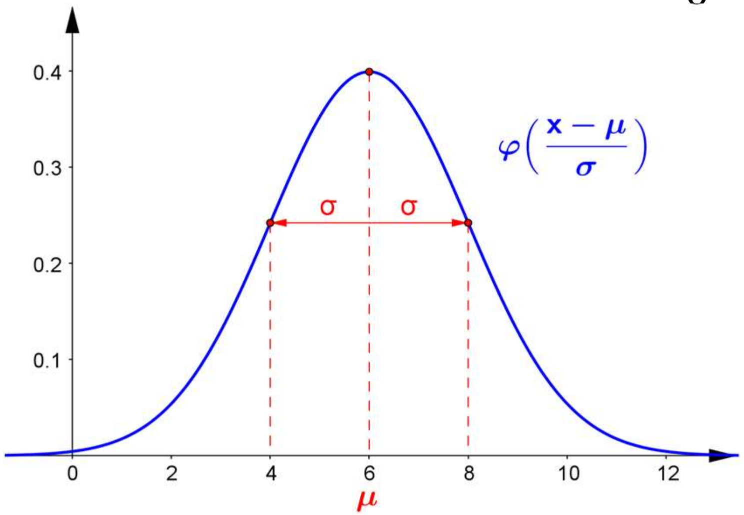


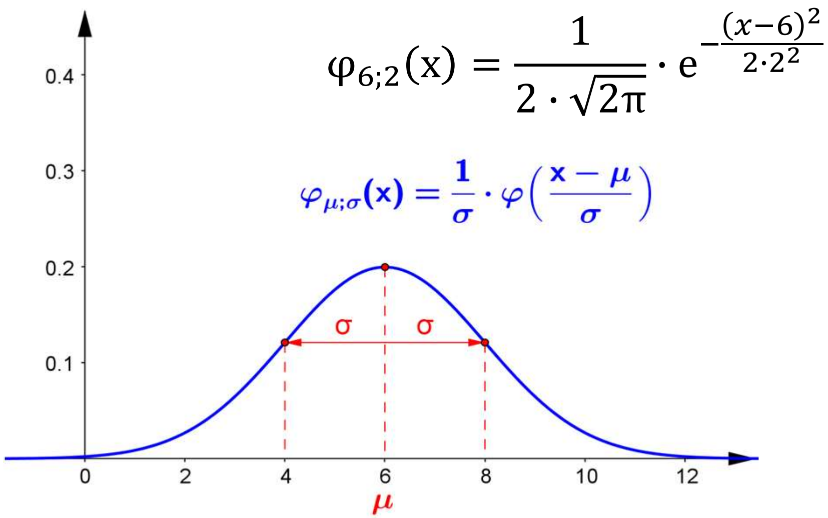
$$\varphi_{6;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{2}}$$



Die Normalverteilung

- (2) Streckung des Graphen mit dem Faktor σ in x-Richtung und mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$ in y-Richtung.





Durch die Transformationen ändert sich der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse nicht.

Die Normalverteilung

- Eine stetige Zufallsgröße X, die eine Gaußsche Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt, heißt **normalverteilt mit den Parametern μ und σ, kurz $N_{\mu;\sigma}$ – verteilt.**

- zugehörige Dichtefunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$:

$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

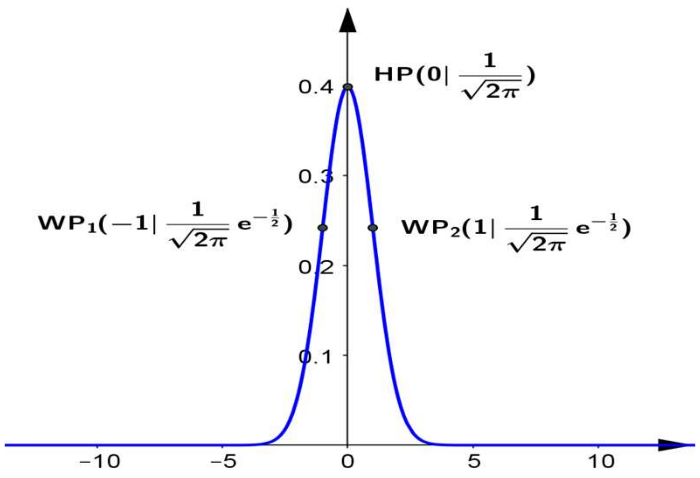
- Es gilt

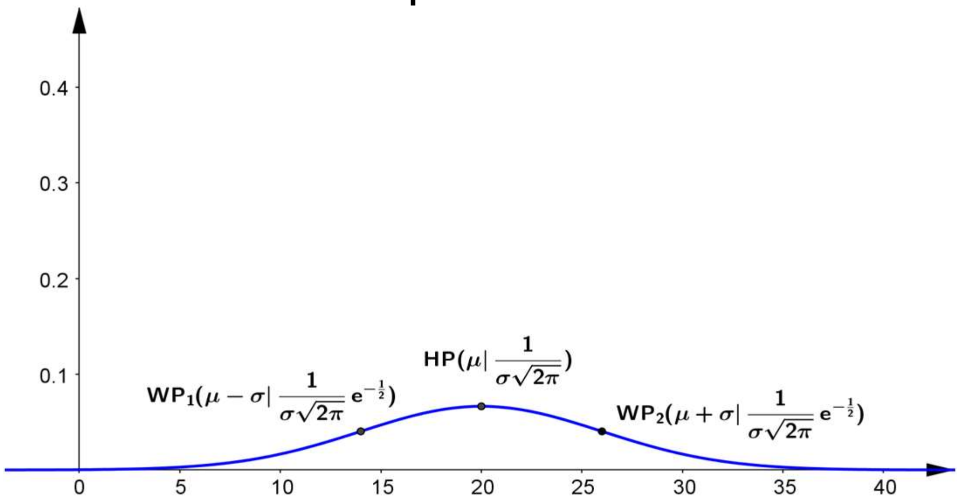
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi_{\mu;\sigma}(a) - \Phi_{\mu;\sigma}(b) = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x)dx$$

Die Analysis der Glockenfunktion

- Die Graphen der Funktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ sind achsensymmetrisch zur Geraden $x = \mu$.

- Sie besitzen einen Hochpunkt und zwei Wendepunkte.





Standardisierung

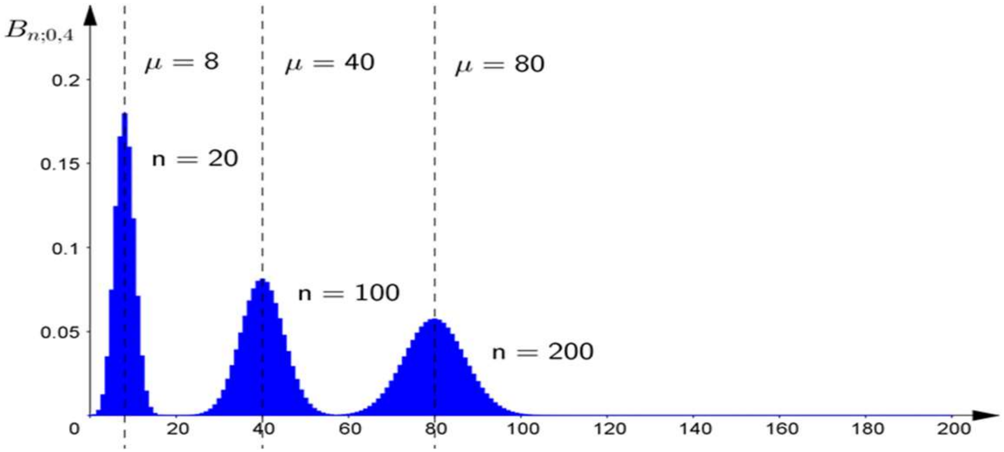
- Eine Zufallsgröße heißt **standardisiert**, wenn $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.
- Eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern μ und σ lässt sich mit den o.g. Transformationen in umgekehrter Reihenfolge standardisieren.
- Die Zufallsgröße X^* mit $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist standardnormalverteilt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X lässt sich auf die von X^* zurückführen.

$$\Phi_{\mu;\sigma}(z) = \Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$$

Binomial- und Normalverteilung

- Die Histogramme einer binomialverteilten Zufallsgröße werden für wachsendes n bei konstantem p breiter und nahezu symmetrisch um den Erwartungswert.
- Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse werden immer kleiner, da die Flächensumme der Rechtecke immer die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 ergibt.
- Die Histogramme erhalten zunehmend Glockenform, wobei sich $\mu = n \cdot p$ immer weiter nach rechts verschiebt.

Binomial- und Normalverteilung



Untersuchung des Verhaltens von $B_{n;p}$ für große Werte von n

(1) Verschieben des Schaubilds, so dass der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ auf der y-Achse liegt.

(2) Strecken der Rechteckhöhen mit dem Faktor $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

(3) Strecken der Rechteckbreiten mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$

Binomial- und Normalverteilung

- Eine solche Verteilung heißt **standardisierte Binomialverteilung**.

- **De Moivre** hat erkannt, dass die Histogramme bestimmter standardisierter Binomialverteilungen trotz unterschiedlicher Parameter n und p in guter Näherung einen fast identischen Verlauf zeigen. Diese Histogramme haben einen glockenförmigen Verlauf.

- **Laplace** hat erkannt, dass die Histogramme standardisierter Binomialverteilungen tendenziell umso besser von glockenförmigen Graphen umrandet werden, je größer die Standardabweichung σ ist. (Faustregel: wenn die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist)

Binomial- und Normalverteilung

- Das Schaubild der Gaußschen Glockenfunktion φ mit
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$
liefert die Grenzkurve.

- Die Summenwahrscheinlichkeit $P(X \leq k) = B_{n;p}(X \leq k)$ kann näherungsweise durch den Inhalt der Teilfläche, die von der Gauß-Kurve und der x-Achse im Intervall $(-\infty; z]$ eingeschlossen wird, berechnet werden. Integrale Näherungsformel von **de Moivre-Laplace**:
$$B_{n;p}(X \leq k) \approx \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)dx \qquad \text{mit} \quad z = \frac{k-\mu}{\sigma}$$

Binomial- und Normalverteilung

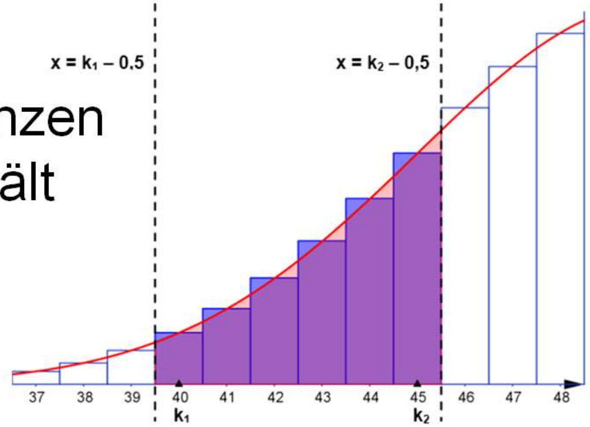
- Mit dem WTR kann man direkt $B_{n;p}$ mit $\Phi_{\mu;\sigma}$ vergleichen.
- Die Intervallwahrscheinlichkeit $P(k_1 \leq X \leq k_2)$ ist näherungsweise gleich der Differenz $\Phi(z_2) - \Phi(z_1)$, also gilt

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \int_{-\infty}^{z_2} \varphi(x)dx - \int_{-\infty}^{z_1} \varphi(x)dx$$

$$\text{mit} \quad z_1 = \frac{k_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{k_2 - \mu}{\sigma}$$

Binomial- und Normalverteilung – Stetigkeitskorrektur

- Um die Randrechtecke nicht nur halb mit einzubeziehen, versetzt man die Intervallgrenzen jeweils um 0,5 LE nach außen. Dadurch erhält man einen besseren Näherungswert für die Intervallwahrscheinlichkeit.



- Für die standardisierten Variablen gilt dann:

$$z_1 = \frac{k_1 - 0{,}5 - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{k_2 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}$$

und für die integrale Näherung

$$B_{n;p}(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Normalverteilung – Sigma-Regeln*

*Vertiefung

Für eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\sigma > 3$ gilt

a	$P(\lvert X - \mu \rvert \leq a)$
σ	
$2 \cdot \sigma$	
$3 \cdot \sigma$	

$P(\lvert X - \mu \rvert \leq a)$	a
90%	
95%	
99%	

Normalverteilung – Sigma-Regeln*

*Vertiefung

Für eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\sigma > 3$ gilt

a	$P(\lvert X-\mu\rvert \leq a)$
σ	68,3%
2·σ	95,5%
3·σ	99,7%

$P(\lvert X-\mu\rvert \leq a)$	a
90%	1,64·σ
95%	1,96·σ
99%	2,58·σ

Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

Leistungsfach – Kopftext

Sie benutzen digitale Hilfsmittel beim Umgang mit diskreten und stetigen Verteilungen. Im Kontext der Untersuchung normalverteilter Zufallsgrößen nutzen sie ihre in der Analysis gewonnenen Kompetenzen.

Grundlegend unterschiedliche Perspektive

Basisfach – Kopftext

Sie lernen diskret und stetig verteilte Zufallsgrößen kennen und berechnen die Werte einer normalverteilten Zufallsgröße ohne expliziten Bezug zur Analysis direkt mit einem digitalen Hilfsmittel.

Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

Leistungsfach – Item 3.4.5 (9)

(9) die *Dichtefunktion* einer *normalverteilten Zufallsgröße* mithilfe von *Erwartungswert* und *Standardabweichung* angeben und die zugehörige *Glockenkurve* skizzieren

Unterschiedliche Schwerpunkte

Basisfach – Item 3.5.5 (9)

(2) Den Zusammenhang der Kennwerte *Erwartungswert* und *Standardabweichung* einer *Normalverteilung* und der zugehörigen Glockenkurve beschreiben.

Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

Betrachtungsweise von Erwartungswert und Standardabweichung:

Im Basisfach werden diese Werte aus Datensätzen überwiegend mithilfe digitaler Hilfsmittel ermittelt.

verstärkt realitätsbezogenes Vorgehen

Unterschiedliche Schwerpunkte

Φ

Im Leistungsfach erfahren die Schülerinnen und Schüler auch, dass diese Kenngrößen mithilfe von Integralen bestimmt werden können.

Verständnis mathematischer Begriffe und Zusammenhänge

Unterscheidung Leistungsfach – Basisfach

Leistungsfach – Item 3.4.5 (8)

(8) den Unterschied zwischen *diskreten* und *stetigen Zufallsgrößen* erläutern

Unterschiedliche Durchdringungstiefe

!

Basisfach – Item 3.5.5 (1)

(1) den Unterschied zwischen *diskreten* und *stetigen Zufallsgrößen* am Beispiel *binomial-* und *normalverteilter Zufallsgrößen* beschreiben

Wichtige Begriffe

Basisfach	Leistungsfach
Binomialverteilung als Beispiel für eine diskrete Verteilung Normalverteilung als Beispiel für eine stetige Verteilung	Binomialverteilung und z.B. Gleichverteilungen als Beispiele für diskrete Verteilungen Normalverteilung und weitere stetige Verteilungen (z.B. Gleichverteilung, Dreiecksverteilung, Exponentialverteilung, …)
Normalverteilung mit Schwerpunkt auf Anwendungsaspekt	Normalverteilung auch mit Bezug zur Analysis
Erwartungswert / Standardabweichung	Erwartungswert / Standardabweichung
Glockenkurve	Gauß-Funktion; Glockenkurve Dichtefunktion

Didaktische Hinweise, Seite 7

Bedeutung der digitalen Hilfsmittel

- Normalverteilung als Näherung für binomialverteilte Zufallsgrößen im Unterricht in erster Linie von historischer Bedeutung.
- Leistungsfach:
  Verständnis für Algorithmen der Hilfsmittel durch Kenntnis der Dichtefunktion und Bezug zur Analysis
- Basisfach:
  nicht ausschließlich „Blackbox", sondern Zusammenhang zwischen Fläche unter der Glockenkurve und Wahrscheinlichkeit

Anleitungen im Material

Kursstufe ab 2021 – Die Normalverteilung

Eingangsgedanken

Vorwissen: „Binomialverteilung = Treffer oder Nichttreffer“

Was bedeutet hier Treffer?

Schuhgröße	35	36	37	38	39	40	41	42
Anteil in %	3	8	15	22	23	16	9	4

Binomialverteilung passt hier nicht: $P(X=38) \neq B_{n;p}(38)$

Aber die Normalverteilung!

Möglicher Unterrichtsgang im Basisfach

5. Aufgabenstellungen im Basisfach

Grundlegend:

- Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen erläutern (am Beispiel Binomial- und Normalverteilung)
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einer Glockenkurve ablesen
- Erwartungswert und Standardabweichung aus einem (gegebenen) Datensatz ermitteln
  - bei kleinen Datenmengen „händisch“
  - ansonsten mit WTR und weiteren digitalen Hilfsmitteln

Didaktische Hinweise, Seite 8

Roter Faden

1. Es gibt diskret und stetig verteilte Zufallsgrößen.

2. Viele Datensätze lassen sich durch Glockenkurven beschreiben und können als normalverteilt angenommen werden.

3. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten können näherungsweise als Fläche unter der Glockenkurve ermittelt werden.

4. Die Form der Glockenkurve hängt von den Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung ab.

5. Erwartungswert und Standardabweichung können aus einem Datensatz ermittelt werden.

1 – 3 Wiederholung Binomialverteilung

Planarbeit

- Festigung der Begriffe Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette
- Wiederholung und Anwendung der Formel von Bernoulli
- Interpretation der Trefferwahrscheinlichkeit als Fläche der Säulen des Histogramms
- Einführung des Begriffs „diskret verteilte Zufallsgröße“

Infoblatt

Kursstufe ab 2021 – Die Normalverteilung

Fachliches | Didaktisches | Unterrichtsgang BF | Unterrichtsgang LF

M A T H E
A Z H
T P T
H G A
E H T A M

4 – 5 Normalverteilung

- Vom Histogramm zur Glockenkurve
- Einführung des Begriffs „stetig verteilte Zufallsgröße“
- Wahrscheinlichkeiten anschaulich als Fläche unter der Glockenkurve interpretieren und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen nutzen

Problemorientierter Einstieg

Lehrervortrag

Übungsaufgaben

Kursstufe ab 2021 – Die Normalverteilung

Fachliches | Didaktisches | Unterrichtsgang BF | Unterrichtsgang LF

6 – 7 Erwartungswert und Standardabweichung

- Zusammenhang Erwartungswert und Standardabweichung mit Form und Lage der Glockenkurve
  – grundlegendes und erweitertes Niveau
  (mögliche Vertiefung: Funktionsgleichung in konkreten Fällen)

- Erwartungswert und Standardabweichung ermitteln
  – mithilfe der Definition (händisch)
  – mithilfe des WTR

Entdeckendes Lernen

Planarbeit

8 – 11 Anwendungen

Möglicher Unterrichtsgang im Leistungsfach

4. Aufgabenstellungen im Leistungsfach

Grundlegend:

- Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen erläutern
- Überprüfen, ob eine Dichtefunktion vorliegt
- Dichtefunktionen durch Berechnung von Parametern bestimmen
- Zusammenhang zwischen einer Verteilungsfunktion und der zugehörigen Dichtefunktion untersuchen

Didaktische Hinweise, Seite 7

Roter Faden des Unterrichtsgangs

- Ggf. Wiederholung diskreter Verteilungen
- Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und Wahrscheinlichkeiten
- Zentrale Begriffe stetiger Verteilungen mit Beispielen
- Vernetzung mit der Analysis, insbesondere mit der Integralrechnung
- Motivation der Gaußschen Glockenkurve durch Simulationen
- Definition und innermathematische Untersuchung der Normalverteilung
- Satz von de Moivre – Laplace

0 Diskrete Verteilungen

- Wdh. Laplace-Experimente und Begriffseinführung „Gleichverteilung"
- ggf. Aufgreifen des Vorwissens zur Binomialverteilung, falls nicht unmittelbar davor Hypothesentest behandelt wurde

1 – 2 Zufallsgröße bei einer Zielscheibe

- Handlungsorientierter Einstieg in das Thema „stetige Verteilungen"
- Simulation des Experiments „Zielscheibe"
- Überleitung zur Dichtefunktion
- Wahrscheinlichkeiten als Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion interpretieren

3 – 4 Einige stetige Verteilungen

- Zufallszahl (Gleichverteilung)
- Summe zweier Zufallszahlen (Dreiecksverteilung)
- Wartezeitprobleme (Exponentialverteilung)
- …

5 – 6 Erwartungswert und Standardabweichung

- Erwartungswert: $\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$
- Standardabweichung: $\sigma = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx$
- Exakte Berechnung der Kenngrößen für Dreiecksverteilung möglich
- Kenngrößen für Exponentialverteilung entweder näherungsweise oder exakt mittels partieller Integration (Vertiefung)
- Aufgaben

7 – 10 Normalverteilung

- Summe von 3 Zufallszahlen, dann Summe von 20 Zufallszahlen
- Die Gaußsche Glockenfunktion: $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Normiertheit der Glockenfunktion
- Analysis der Glockenfunktion
- Aufgaben

11 – 12 Satz von de Moivre – Laplace

- Approximation der Binomialverteilung
- Integrale Näherung durch die Normalverteilung
- Aufgaben

13 – 16 Aufgaben

- Aufgabenmix
- Anwendungsaufgaben
- Annähernd normalverteilte Zufallsgrößen

Fazit

Basisfach	Leistungsfach
Binomialverteilung als Beispiel für eine diskrete Verteilung Normalverteilung als Beispiel für eine stetige Verteilung	Binomialverteilung und z.B. Gleichverteilungen als Beispiele für diskrete Verteilungen Normalverteilung und weitere stetige Verteilungen (z.B. Gleichverteilung, Dreiecksverteilung, Exponentialverteilung, …)
Normalverteilung mit Schwerpunkt auf Anwendungsaspekt	Normalverteilung auch mit Bezug zur Analysis
Erwartungswert / Standardabweichung	Erwartungswert / Standardabweichung
Glockenkurve	Gauß-Funktion; Glockenkurve Dichtefunktion

Aufbau Material

I Fachliche Grundlagen

Normalverteilung – Fachliche Grundlagen

1. Diskrete Verteilungen

Diskrete Zufallsgrößen sind Zufallsgrößen, deren Werte endlich oder abzählbar unendlich sind und durchnummeriert werden können. Ihre Wahrscheinlichkeiten kann man in Tabellen oder anschaulich mit Histogrammen darstellen.

Die Zufallsgröße X besitzt den Erwartungswert

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)),$$

für die Varianz $V(X)$ und die Standardabweichung σ gelten

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

und $$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}.$$

Aufbau Material

II Didaktische Hinweise

Normalverteilung – didaktische Hinweise

I. Grundlagen

Die Thematik der Normalverteilung bildet chronologisch betrachtet den Abschluss des Teilgebiets Stochastik in der Schulmathematik. Die Schülerinnen und Schüler sammeln bereits in den Klassenstufen 5/6 erste Erfahrungen auf diesem Gebiet, in dem sie die Kenngrößen Mittelwert, Minimum und Maximum bestimmen, Daten sammeln, auswerten und grafisch darstellen, sowie relative Häufigkeiten ermitteln.

In den Klassenstufen 7/8 lernen sie mit Median und den Quartilen weitere Kenngrößen kennen und ergänzen ihr Spektrum an Darstellungsmöglichkeiten durch Boxplots. Sie erfahren die Bedeutung des Gesetzes der großen Zahlen und legen so die Grundlagen für einen empirischen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Die Schülerinnen und Schüler führen Zufallsexperimente durch und bestimmen Wahrscheinlichkeiten durch einfache kombinatorische oder theoretische Überlegungen und mithilfe von Baumdiagrammen. So wird die theoretische Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs angelegt und Laplace-Experimente sind das erste ex-

Kursstufe ab 2021 – Die Normalverteilung

Fachliches | Didaktisches | Unterrichtsgang BF | Unterrichtsgang LF

Aufbau Material

III Unterrichtsgang Basisfach

1 Beschreibung des Unterrichtsgangs

2 Arbeitsblätter mit Lösungen

3 Aufgaben mit Lösungen

Weitere Aufgaben im Fundus MAP

Aufbau Material

IV Unterrichtsgang Leistungsfach

1 Beschreibung des Unterrichtsgangs

2 Arbeitsblätter mit Lösungen

3 Aufgaben mit Lösungen

4 GeoGebra Dateien

Weitere Aufgaben im Fundus SAP

Kursstufe ab 2021 – Die Normalverteilung

Aufbau Material

V WTR Hinweise

Hinweise zum WTR-Einsatz (TI-30X Plus MathPrint)

1. Eingabe von Daten / Ermitteln der Kenngrößen μ und σ

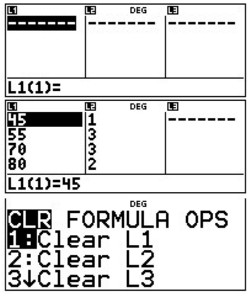
Kann ein Datensatz als normalverteilt angenommen werden, so entspricht der Mittelwert dem Erwartungswert. Für die Standardabweichung bietet der WTR zwei Kenngrößen an:

- σx: die aus dem Datensatz errechnete Standardabweichung
- sx: eine aus der Analyse des Datensatzes empirisch ermittelte Standardabweichung

Aufrufen der Listen zur Eingabe von Datensätzen über die Taste data . Es öffnet sich ein Bildschirm mit drei Spalten (Listen).

In die erste Spalte gibt man die Daten ein, in die zweite die jeweilige Häufigkeit.

Das Löschen der Daten erfolgt durch erneutes Betätigen der Taste data und Auswahl jener Listen, deren Inhalt gelöscht werden soll.



Hinweise zum WTR-Einsatz (CASIO FX-87DE X)

1. Eingabe von Daten / Ermitteln der Kenngrößen μ und σ

Kann ein Datensatz als normalverteilt angenommen werden, so entspricht der Mittelwert dem Erwartungswert. Für die Standardabweichung bietet der WTR zwei Kenngrößen an:

- σx: die aus dem Datensatz errechnete Standardabweichung
- sx: eine aus der Analyse des Datensatzes empirisch ermittelte Standardabweichung

Aufrufen des Statistik-Menus 3:Statistik

Untermenu 1:Variable
Es öffnet sich ein Bildschirm mit einer Spalte (Liste).

Hier kann nun der Datensatz eingegeben werden.