Normalverteilung – Fachliche Grundlagen

1. Diskrete Verteilungen

Diskrete Zufallsgrößen sind Zufallsgrößen, deren Werte endlich oder abzählbar unendlich sind und durchnummeriert werden können. Ihre Wahrscheinlichkeiten kann man in Tabellen oder anschaulich mit Histogrammen darstellen.

Die Zufallsgröße X besitzt den Erwartungswert

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i),$$

für die Varianz $V(X)$ und die Standardabweichung σ gelten

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

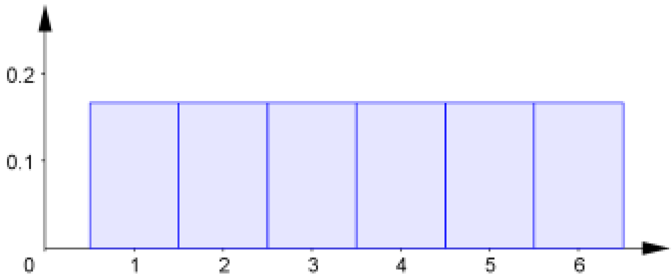
und

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}.$$

Beispiel 1: Einmaliges Werfen eines Würfels; die Zufallsgröße X gibt die Augenzahl an.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Es gilt:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 3{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i - 3{,}5)^2} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}7$$

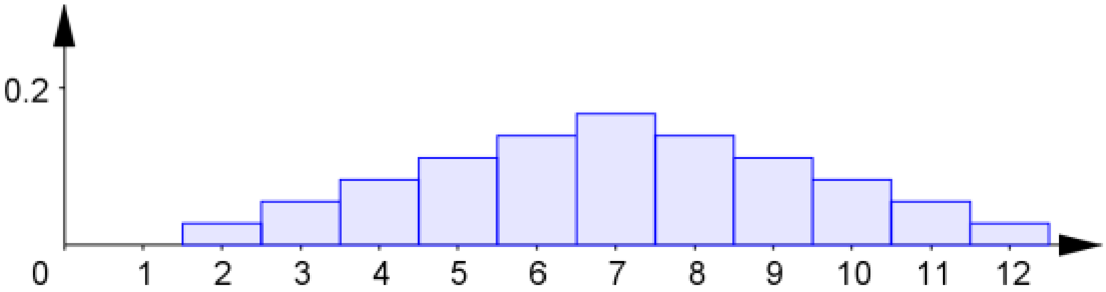
Interpretation dieses Ergebnisses:

$$P(|X - \mu| \le \sigma) = \frac{4}{6} \approx 0{,}67; \; (X = 2, 3, 4 \text{ oder } 5)$$

Beispiel 2: Zweimaliges Werfen eines Würfels;
die Zufallsgröße X gibt die Summe der Augenzahlen an.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

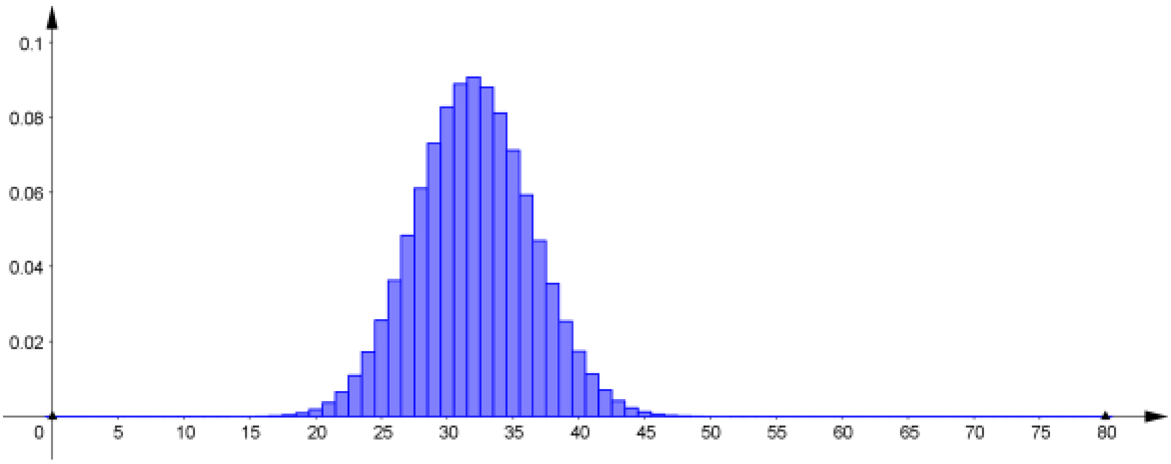


Es gilt:

$\mu = E(X) = 7$ (Berechnung mit der Formel oder über Summenbildung 3,5 + 3,5 = 7)

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2{,}42 \quad \text{und} \quad P(|X - \mu| \le \sigma) = \frac{24}{36} \approx 0{,}67; \quad (X = 5, 6, 7, 8 \text{ oder } 9)$$

Beispiel 3: Binomialverteilung mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Länge n;
die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an, z.B. $n = 80$, $p = 0{,}4$.



Es gilt:

$$\mu = E(X) = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}4 = 32$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 4{,}38$$

$$B_{80;0,4}(|X - \mu| \le \sigma) \approx 0{,}696; \quad (X = 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 \text{ oder } 36).$$

σ –Regeln:

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße mit $\sigma > 3$ gilt in guter Näherung:

a	$P(\lvert X-\mu \rvert \le a)$
σ	68,3 %
$2 \cdot \sigma$	95,5 %
$3 \cdot \sigma$	99,7 %

$P(\lvert X-\mu \rvert \le a)$	a
90 %	$1{,}64 \cdot \sigma$
95 %	$1{,}96 \cdot \sigma$
99 %	$2{,}58 \cdot \sigma$

2. Stetige Verteilungen

Eine stetige Zufallsgröße X ist dadurch gekennzeichnet, dass ihr Wertebereich ein Intervall $I \subseteq IR$ sein kann. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X wird mit Hilfe der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet.

Definition:

Eine integrierbare Funktion f heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte** über einem Intervall I, z.B. $I = [a;b]$ oder $I = (a;b)$, wenn gilt:

(1) $f(x) \ge 0$ für alle x aus I,

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ (falls $I = IR$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$).

Eine **Zufallsgröße** X, die Werte aus dem Intervall I annimmt, heißt **stetig verteilt** mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f, wenn für alle r_1, r_2 aus I gilt

$$P(r_1 \le X \le r_2) = \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx\,.$$

Die Funktion **F** mit $$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

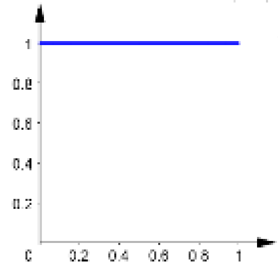
heißt **Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X.

Falls $I \subset IR$, muss hierzu die Dichtefunktion f durch Null auf $IR \setminus I$ fortgesetzt werden.

Anmerkungen:

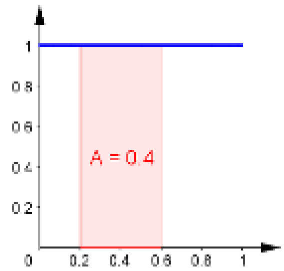
1. Durch (1) ist gewährleistet, dass die Wahrscheinlichkeiten von Teilintervallen nicht negativ sind.
2. Die Wahrscheinlichkeit des gesamten Intervalls beträgt 1 = 100%.
3. Man nennt f auch **Dichtefunktion.**
4. Die Funktionswerte $f(x)$ sind keine Wahrscheinlichkeiten. Denn die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X genau den Wert k annimmt, berechnet sich durch $P(X = k) = \int_k^k f(x)\,dx = 0$, d.h. die Einzelwahrscheinlichkeiten sind exakt null.

Beispiel 1: Gleichverteilung



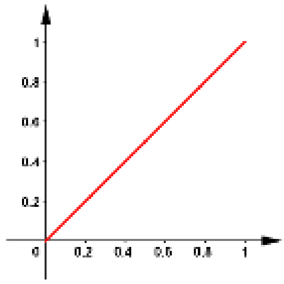
Die Zufallsgröße X beschreibt eine Zufallszahl X im Intervall $I = [0;1]$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist durch f mit $f(x) = 1$ für $0 \le x \le 1$ gegeben.



Für die Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls $[0,2;0,6]$ gilt dann:

$$P(0,2 \le X \le 0,6) = \int_{0,2}^{0,6} 1\,dx = 0,6 - 0,2 = 0,4$$



Darstellung der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(X \le z) = \int_0^z f(x)\,dx$$

Erwartungswert und Standardabweichung einer stetigen Zufallsgröße X:

In Anlehnung an die Definition des Erwartungswerts im diskreten Fall

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\left(X = x_i\right)$$

legt man den **Erwartungswert von X** im stetigen Fall fest durch:

$$\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx\,.$$

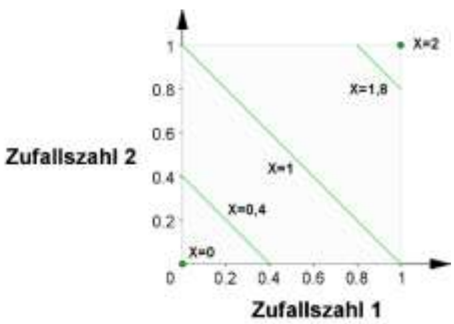
Entsprechend gilt für die **Standardabweichung von X**:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}\,.$$

Für Beispiel 1 ergibt sich somit:

$$\mu = E(X) = \int_0^1 x \cdot 1\,dx = 0,5\,,\quad \sigma = \sqrt{\int_0^1 (x-0,5)^2 \cdot 1\,dx} \approx 0,29\,,\quad P\left(|X-\mu| \le \sigma\right) \approx 0,58\,.$$

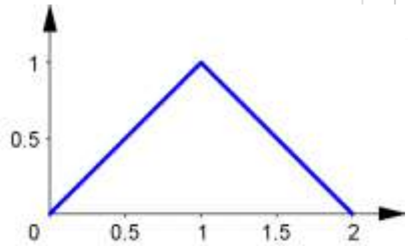
Beispiel 2: Summe zweier Zufallszahlen



Die Zufallsgröße X gibt die Summe aus zwei Zufallszahlen zwischen 0 und 1 an, d.h. $x \in [0;2]$.

Aus der Abbildung rechts ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte f:

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & , 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

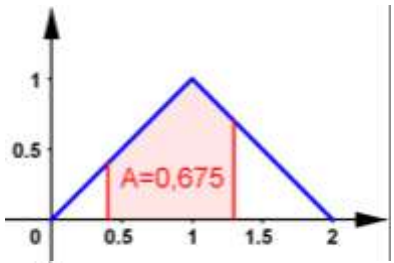


Begründung:

Die Zufallsgröße X kann Werte zwischen 0 und 2 annehmen. Dabei gilt $f(0) = f(2) = 0$.

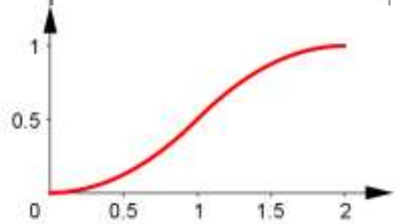
Im Bereich von 0 bis 1 nimmt die Dichte f proportional zu, im Bereich von 1 bis 2 entsprechend ab. Somit ist f eine Dreiecksfunktion. Der Funktionswert $f(1) = 1$ ergibt sich aus der Bedingung $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot f(1) = 1$.

Für die Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls $[0,4;1,3]$ gilt dann: $P(0,4 \le X \le 1,3) = \int_{0,4}^{1,3} f(x)\,dx = 0,675$



Darstellung der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(0 \le X \le b) = \begin{cases} 0,5b^2 & , 0 \le b \le 1 \\ -0,5(2-b)^2 + 1 & , 1 < b \le 2 \end{cases}$$



Für die Kenngrößen ergibt sich:

$$\mu = 1\ ,\quad \sigma = \sqrt{\int_0^2 (x-1)^2 \cdot f(x)\,dx} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,41\ ,\quad P(|X - \mu| \le \sigma) = \frac{2 \cdot \sqrt{6} - 1}{6} \approx 0,65\,.$$

Beispiel 3: Exponentialverteilung

Definition:

Eine Verteilung F mit der **Wahrscheinlichkeitsdichte f** mit

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ ;\quad x \in \mathrm{IR}_0^+;\quad \lambda \in \mathrm{IR}^+$$

heißt **Exponentialverteilung**.

Für eine Exponentialverteilung gilt:

$$\mu = \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{\int_0^\infty (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx} = \frac{1}{\lambda}$$

3. Die Gaußsche Glockenfunktion

Die Gaußsche Glockenfunktion ist eine besonders wichtige Dichtefunktion, die unter anderem im Zusammenhang mit der Binomialverteilung gesehen werden kann.

Die **Gaußfunktion** φ mit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $x \in \mathrm{IR}$ erfüllt die Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

$$(1)\quad \varphi(x) \geq 0 \qquad\qquad (2)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

Nachweis von (2):

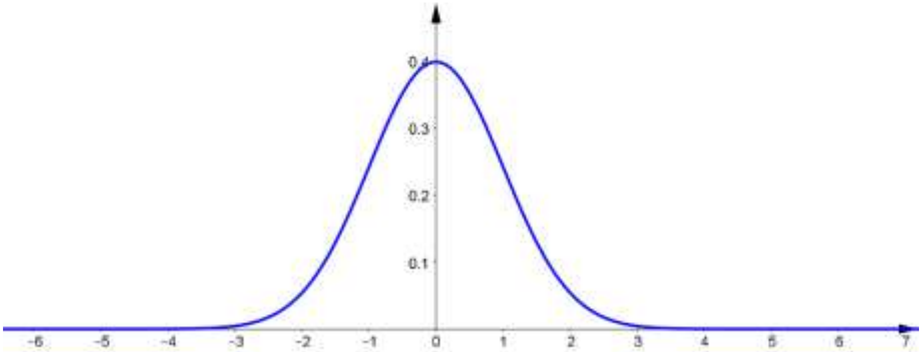
Mit $J := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ folgt $J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,dx\,dy$.

Durch Transformation in Polarkoordinaten erhält man:

$$J^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\infty} 2\pi r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr = 2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow J = \sqrt{2\pi}$$

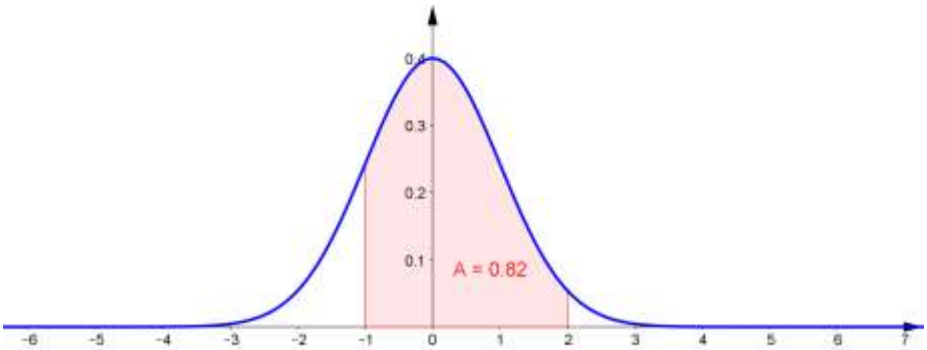
Also ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1.$$

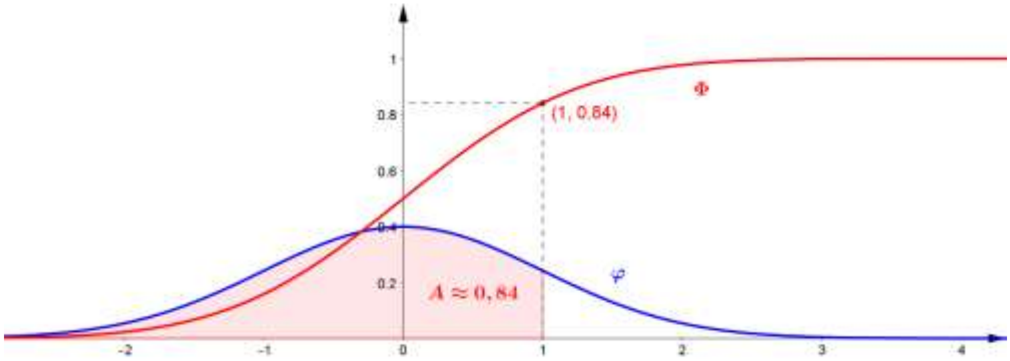


Für die Wahrscheinlichkeit des Teilintervalls $[-1;2]$ gilt dann:

$$P\left(-1 \leq X \leq 2\right) = \int_{-1}^{2} \varphi(x)\,dx \approx 0{,}82$$



Eine stetig verteilte Zufallsgröße X, welche die Gaußfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt, heißt **standardnormalverteilt** mit $\Phi(z)=\int\limits_{-\infty}^{z}\varphi(x)\,dx$.



Es gilt: $$P\left(a\le X\le b\right)=\Phi(b)-\Phi(a)=\int\limits_{a}^{b}\varphi(x)\,dx\,.$$

Für eine stetige Zufallsgröße X gilt:

$$P(a<X<b)=P(a\le X\le b)\ ,\ \text{ da } P(X=a)=P(X=b)=0\,.$$

Für den Erwartungswert von X gilt aufgrund der Symmetrie von φ ($\varphi(x)=\varphi(-x)$):

$$\mu=E(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x)\,dx=0\,.$$

Die Standardabweichung von X berechnet man mit Hilfe partieller Integration:

$$\sigma^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\varphi(x)\,dx=2\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}(x-\mu)^2\varphi(x)\,dx=\lim_{z\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{z}\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{x\,e^{-\frac{x^2}{2}}}_{v'}dx$$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.\underbrace{-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}}_{u\cdot v}\right|_{0}^{z}-\int\limits_{0}^{z}\underbrace{-e^{-\frac{x^2}{2}}}_{u'\cdot v}dx\right)=1$$

Bemerkung: Zur Funktion φ lässt sich keine Stammfunktion in geschlossener Form angeben, daher kann man die Werte von Φ nur numerisch berechnen.

Man erhält beispielsweise
$$P\left(|X-\mu|\le\sigma\right)=\Phi\left(1\right)-\Phi\left(-1\right)=\Phi\left(1\right)-\left(1-\Phi\left(1\right)\right)=2\Phi\left(1\right)-1\approx 0{,}683\,.$$

Betrachtet man um den Erwartungswert symmetrische Intervalle $[\mu-k\cdot\sigma;\mu+k\cdot\sigma]$, so ergeben sich die für die Praxis wichtigen σ-Regeln (mit $\mu=0$ und $\sigma=1$):

a	$P\left(\lvert X-\mu\rvert\le a\right)$
σ	68,3 %
$2\cdot\sigma$	95,5 %
$3\cdot\sigma$	99,7 %

Gibt man umgekehrt markante Werte für die Wahrscheinlichkeiten vor, so ergeben sich die folgenden σ-Regeln (mit $\mu=0$ und $\sigma=1$):

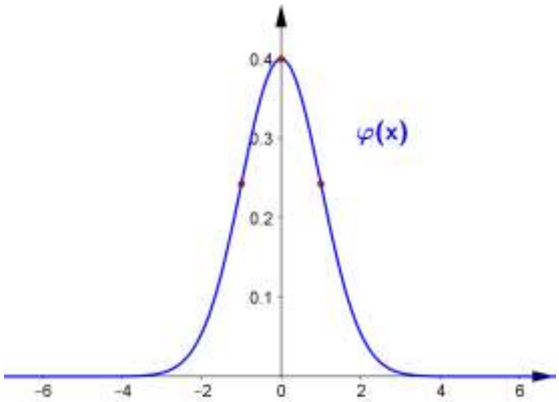
$P\left(\lvert X-\mu\rvert\le a\right)$	a
90 %	$1{,}64\cdot\sigma$
95 %	$1{,}96\cdot\sigma$
99 %	$2{,}58\cdot\sigma$

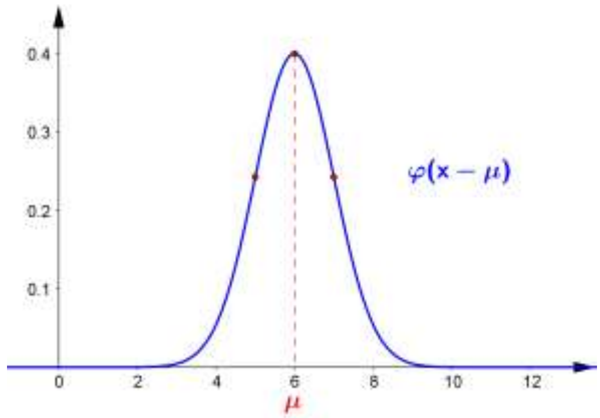
Die σ-Regeln wurden bereits in Kapitel 1 im Zusammenhang mit der Binomialverteilung angegeben. Dieser Zusammenhang wird in Kapitel 7 noch genauer erläutert.

4. Normalverteilung

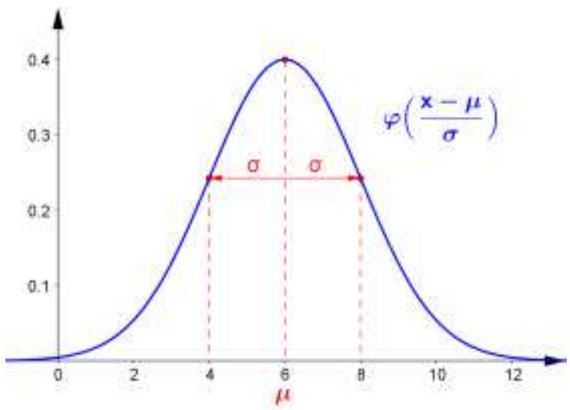
Ausgehend von der Standardnormalverteilung lässt sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu beliebig vorgegebenen Werten von μ und σ mit Hilfe einfacher Transformationen erzeugen.

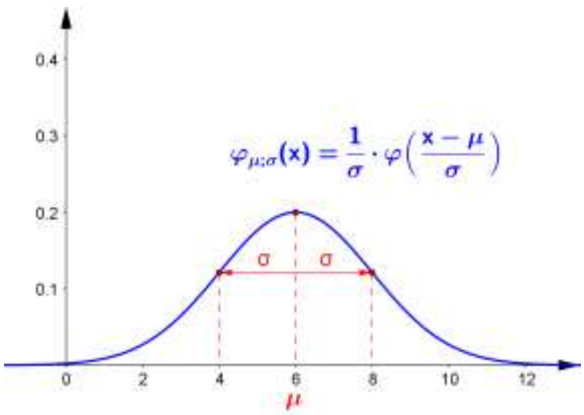
Verschiebt man den Graphen von φ um den Wert μ in x-Richtung





und streckt ihn anschließend bezüglich der Achse $x = \mu$ in x-Richtung mit dem Faktor σ und in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$,





so ändert sich der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und x-Achse nicht.

Die zugehörige Funktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ mit

$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

stellt somit eine Wahrscheinlichkeitsdichte dar, denn es gilt

(1) $\varphi_{\mu;\sigma}(x) \geq 0$ (2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\, dx = 1$

Nachweis von (2): Mit $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\sigma\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1.$$

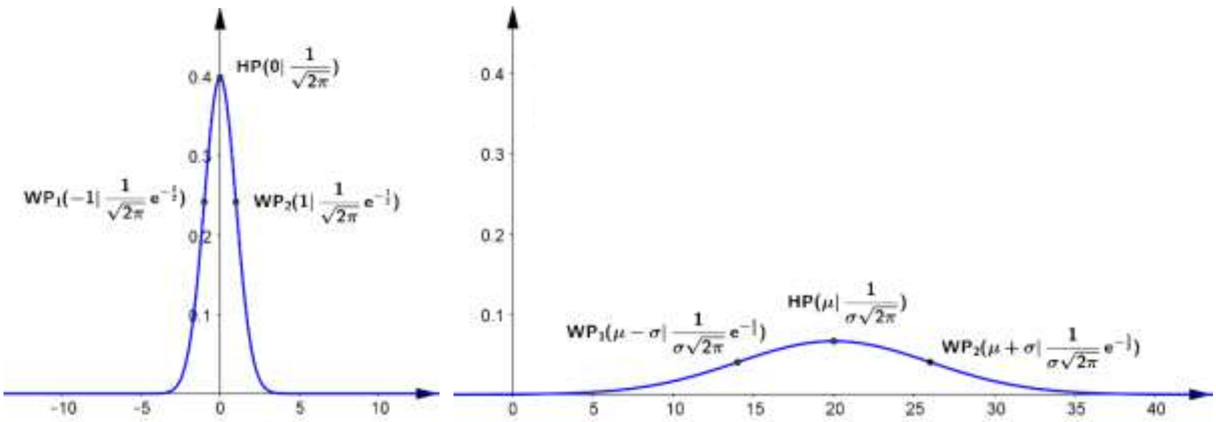
Eine stetige Zufallsgröße X, die eine Gaußsche **Glockenfunktion** $\varphi_{\mu;\sigma}$ als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt, heißt **normalverteilt mit den Parametern** μ **und** σ**,** kurz $N_{\mu;\sigma}$ –verteilt.

Es gilt: $$P(a \le X \le b) = \Phi_{\mu;\sigma}(b) - \Phi_{\mu;\sigma}(a) = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx.$$

Entsprechend nennt man eine standardnormalverteilte Zufallsgröße kurz $N_{0;1}$ – verteilt.

5. Analysis der Glockenfunktion

Der Graph der Funktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ ist achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$, besitzt einen Hochpunkt und zwei Wendepunkte, welche sich mit den Kenntnissen aus der Kursstufenanalysis berechnen lassen.



6. Standardisierung

Eine Zufallsgröße heißt **standardisiert**, wenn $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

Eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern μ und σ lässt sich mit den in Kapitel 4 dargestellten Transformationen in umgekehrter Reihenfolge standardisieren. Die Zufallsgröße X^* mit $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist standardnormalverteilt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X lässt sich auf die von X^* zurückführen.

$$\Phi_{\mu;\sigma}(z) = \Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$$

Dies war in der Unterrichtspraxis bei der Verwendung von Tabellen ein wichtiger Zusammenhang, der jedoch mit den Möglichkeiten des WTR zur konkreten Berechnung von Ergebnissen nicht notwendigerweise benötigt wird.

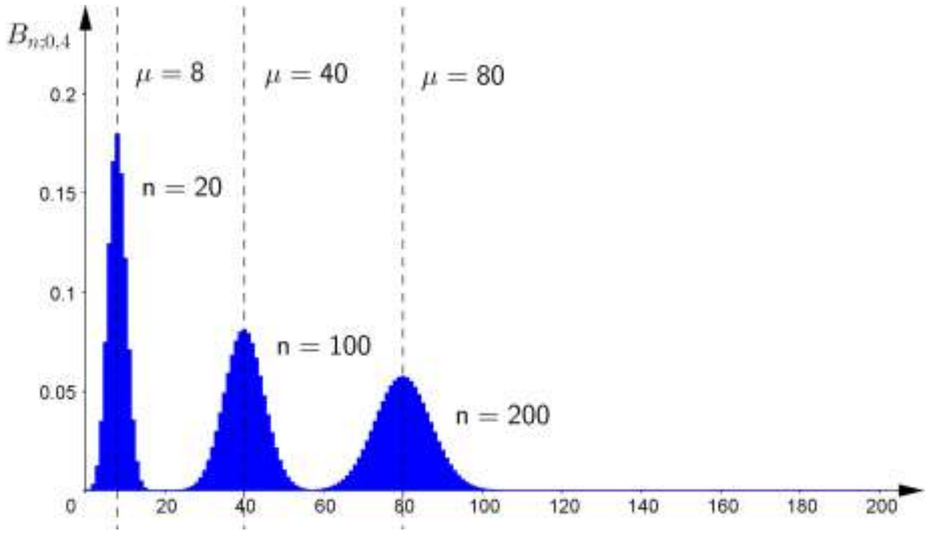
Die in Kapitel 3 angeführten σ-Regeln bleiben bei der Transformation erhalten.

7. Zusammenhang zwischen Binomial- und Normalverteilung

Betrachtet man die Binomialverteilungen $B_{n;p}$ für wachsendes n bei konstantem p, so werden die Histogramme einer binomialverteilten Zufallsgröße breiter und nahezu symmetrisch um den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$.

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse werden immer kleiner, da die Flächensumme der Rechtecke immer die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 ergibt.

Die Histogramme erhalten zunehmend Glockenform, wobei sich die Stelle $\mu = n \cdot p$ immer weiter nach rechts verschiebt.



Um das Verhalten von $B_{n;p}$ für große Werte von n besser untersuchen zu können, verschiebt man die Schaubilder so, dass der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ auf der y-Achse liegt. Jeder Wert $X = k$ wird um μ Einheiten nach links verschoben.

Gleichzeitig streckt man die Rechteckhöhen, also die $B_{n;p}$ – Werte, mit dem Faktor $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ und die ursprünglichen Rechteckbreiten (1 LE) mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$. Damit gleicht man das Flacherwerden der Glockenform aus und hat die Konstanz der Flächenmaßzahlen der Rechtecke (der Einzelwahrscheinlichkeiten) gewahrt.

Man erhält eine neue Zufallsgröße X^*, eine **standardisierte Zufallsgröße**

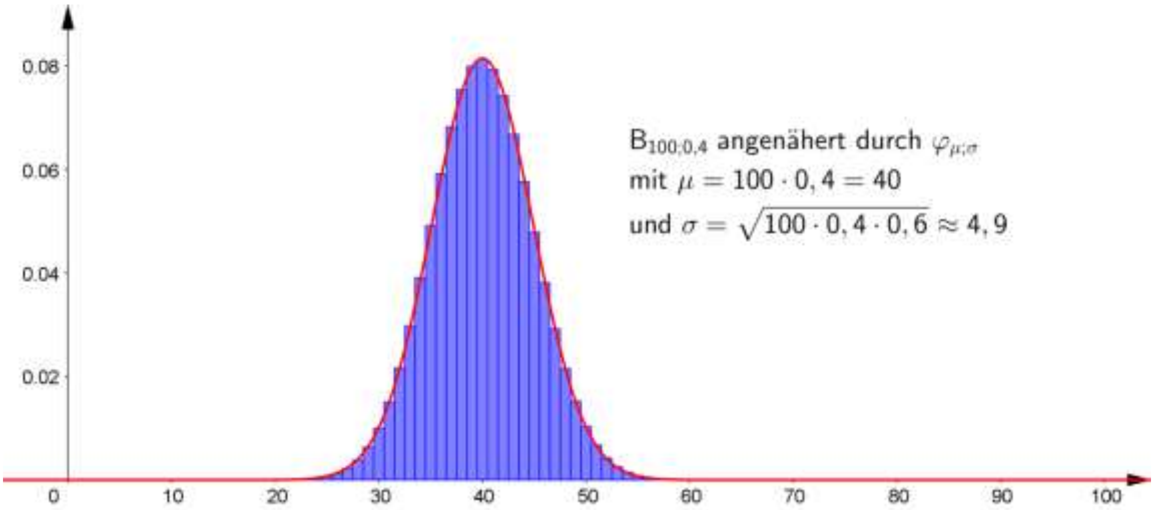
$$X^* = \frac{1}{\sigma} \cdot (X - \mu) = \frac{X - \mu}{\sigma} .$$

Eine solche Verteilung heißt **standardisierte Binomialverteilung**.

De Moivre hat erkannt, dass die Histogramme bestimmter standardisierter Binomialverteilungen trotz unterschiedlicher Parameter n und p in guter Näherung einen fast identischen Verlauf zeigen. Diese Histogramme haben einen glockenförmigen Verlauf.

Laplace hat diese Überlegungen weitergeführt und erkannt, dass die Histogramme standardisierter Binomialverteilungen tendenziell umso besser von glockenförmigen Graphen umrandet werden, je größer die Standardabweichung σ ist (Faustregel: Wenn die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist).

Das Schaubild der Gaußschen Glockenfunktion φ mit $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ liefert die Grenzkurve.



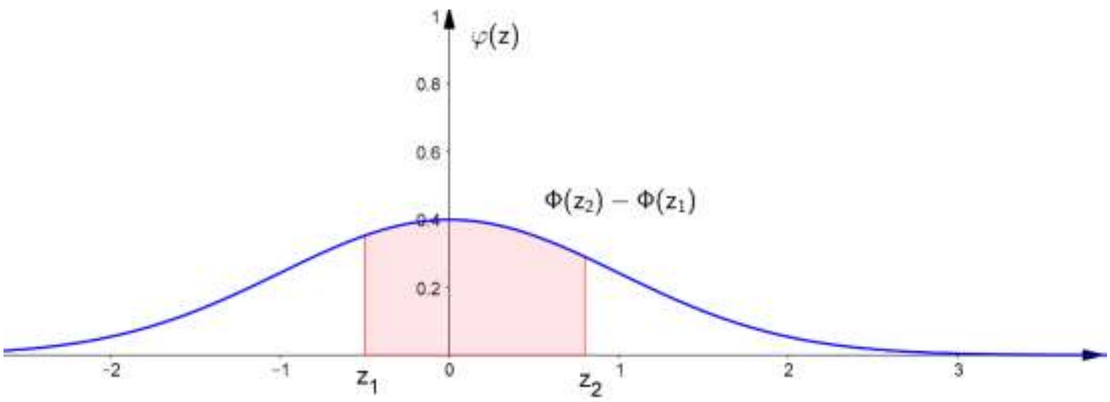
Die Summenwahrscheinlichkeit $B_{n;p}(X \le k)$ kann dann näherungsweise durch den Inhalt der Teilfläche, die von der Gauß-Kurve und der x-Achse im Intervall $(-\infty; z]$ eingeschlossen wird, berechnet werden. Es gilt: $B_{n;p}(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\,dx$ mit $z = \frac{k-\mu}{\sigma}$.

Diese Gleichung bezeichnet man als integrale Näherungsformel von de Moivre-Laplace.

Die Intervallwahrscheinlichkeit $B_{n;p}(k_1 \le X \le k_2)$ ist näherungsweise gleich der Differenz aus den Summenwahrscheinlichkeiten für die obere und die untere Intervallgrenze.

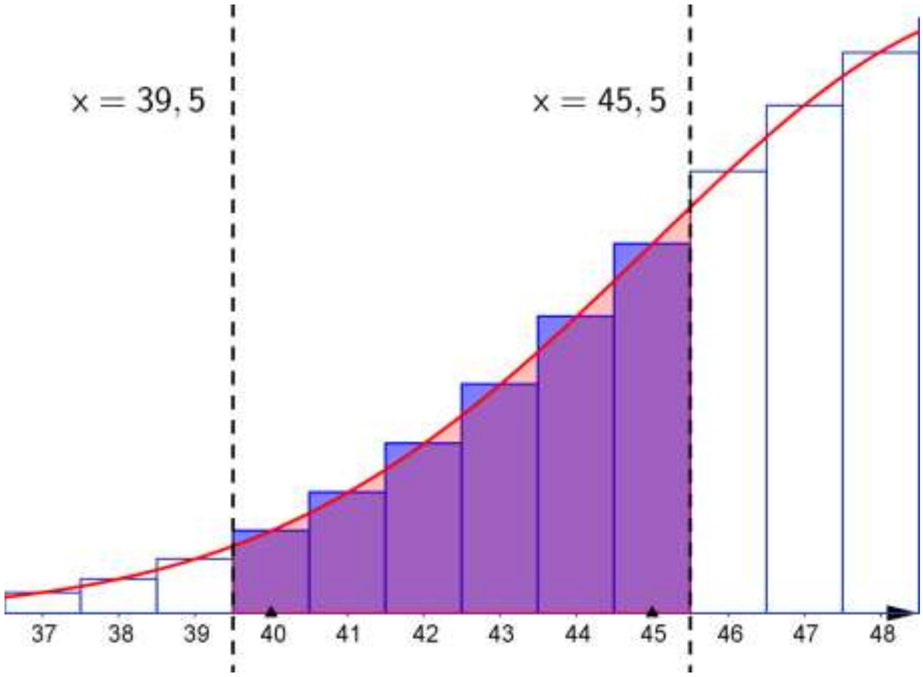
$$B_{n;p}(k_1 \le X \le k_2) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \int_{-\infty}^{z_2} \varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{z_1} \varphi(x)\,dx$$

$$\text{mit } z_1 = \frac{k_1-\mu}{\sigma} \text{ und } z_2 = \frac{k_2-\mu}{\sigma}$$



Mit dem WTR kann man $B_{n;p}$ mit $\Phi_{\mu;\sigma}$ vergleichen.

Stetigkeitskorrektur:



$k_1 = 40$ und $k_2 = 45$ sind die Mitten der Randrechtecke. Um die Randrechtecke nicht nur halb mit einzubeziehen, versetzt man die Intervallgrenzen jeweils um 0,5 LE nach außen. Dadurch erhält man einen besseren Näherungswert für die Intervallwahrscheinlichkeit. Für die standardisierten Variablen gilt dann:

$$z_1 = \frac{k_1 - 0{,}5 - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{k_2 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}$$

und für die integrale Näherung

$$B_{n;p}(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Diese Korrektur ist insbesondere dann wichtig, wenn n und σ nicht hinreichend groß sind.