**Vertiefungskurs Mathematik**

**Lösungen: Beispiele zu den sieben Beweistechniken**

**1) Beweisen mit** **Wahrheitswerttabellen**:

β

α

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  A | B | A → B | ¬ B | ¬ A | ¬ B → ¬ A | α ⇔ β |
| **f** | **f** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** |
| **f** | **w** | **w** | **f** | **f** | **w** | **w** |
| **w** | **f** | **f** | **w** | **f** | **f** | **w** |
| **w** | **w** | **w** | **f** | **f** | **w** | **w** |

Tautologie

β

α

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  A | B | A → B | ¬ B | ¬B ∧ A | ¬ (¬B ∧ A) | α ⇔ β |
| **f** | **f** | **w** | **w** | **f** | **w** | **w** |
| **f** | **w** | **w** | **f** | **f** | **w** | **w** |
| **w** | **f** | **f** | **w** | **w** | **f** | **w** |
| **w** | **w** | **w** | **f** | **f** | **w** | **w** |

Tautologie

**2) Direkter Beweis**

„Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.“

Voraussetzung: mit

Behauptung: mit

Beweis:

 mit

 q.e.d.

„Das Produkt zweier ungerader natürlicher Zahlen ist ungerade“

Voraussetzung: und mit

Behauptung: mit

Beweis:

 mit q.e.d.

„Wenn ungerade ist, dann ist auch ungerade.“

Voraussetzung: mit

Behauptung: mit

Beweis:

mit q.e.d.

Alternativer Beweis: Aus folgt die Behauptung sofort aus den beiden

 vorangegangenen Sätzen

„Wenn durch 6 teilbar ist, dann ist n auch durch 3 teilbar.“

Voraussetzung: mit

Behauptung: mit

Beweis: mit q.e.d.

„Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn sie durch 2 und 5 teilbar ist.“

a) Voraussetzung: mit

Behauptung: und mit

Beweis: mit

 mit

b) Voraussetzung: und mit

Behauptung: mit

Beweis: mit 🡺 n hat den Primfaktor 5

 mit 🡺 n hat den Primfaktor 2

🡺 n hat die Primfaktoren 2 und 5 🡺 mit q.e.d.

Satz des Thales (siehe Lösungen Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe)

Satz von der Winkelsumme im Dreieck (siehe Lösungen Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe)

Satz von der Winkelsumme im Viereck (siehe Lösungen Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe)

Satz vom Umkreis (siehe Lösungen Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe)

**3) Beweis durch Gegenbeispiel:**

„Jede natürliche Zahl hat eine gerade Anzahl von Teilern“

Gegenbeispiel: hat die Teiler 1, 2 und 4

„ ist für jedes eine Primzahl“

Gegenbeispiel: 🡺

**4) Beweis durch Kontraposition**

„Das arithmetische Mittel zweier verschiedener natürlicher Zahlen ist größer als das geometrische Mittel dieser Zahlen.“

Voraussetzung: mit

Behauptung:

Kontraposition:

Voraussetzung:

Behauptung:

Beweis:

 🡺 🡺

 🡺

🡺 🡺 🡺 🡺 q.e.d.

„Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n durch 3 teilbar, dann ist n durch 3 teilbar.“

Voraussetzung: mit

Behauptung: mit

Kontraposition:

Voraussetzung: mit

Behauptung: mit

Beweis:

Fall 1: mit

Fall 2: mit

 q.e.d.

Hinweis:

Als „Abfallprodukt“ erhält man bei diesem Beweis den Satz:

 „Es gibt keine Quadratzahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 hat.“

„Wenn 5 ein Teiler von ist, dann ist 5 auch ein Teiler von n“

Voraussetzung: mit

Behauptung: mit

Kontraposition:

Voraussetzung: mit

Behauptung: mit

Beweis:

Aus folgt mit und

🡺 mit

Somit ist 5 keine Teiler von 🡺 mit q.e.d.

Kehrsatz des Thales

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann liegt der dritte Eckpunkt auf dem Kreis, der die Seite, die dem dritten Eckpunkt gegenüber liegt, als Durchmesser hat.

Kontraposition des Satzes:

Wenn der dritte Eckpunkt nicht auf dem Kreis liegt, der die Seite, die dem dritten Eckpunkt gegenüber liegt, als Durchmesser hat, dann ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

Beweisfigur im Fall 1:



Voraussetzung: C liegt außerhalb des Kreises

Behauptung:

Beweis:

Da C außerhalb des Kreises liegt muss die Strecke BC den Kreis in einem Punkt C1 schneiden.

Das Dreieck ABC1 erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Thales 🡺

Mit dem Nebenwinkelsatz folgt:

Im Dreieck CAC1 gilt der Winkelsummensatz 🡺

🡺

Beweisfigur im Fall 2:



Voraussetzung: C liegt innerhalb des Kreises

Behauptung:

Beweis:

Da C innerhalb des Kreises liegt muss die Halbgerade BC den Kreis in einem Punkt C2 schneiden.

Das Dreieck ABC2 erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Thales 🡺

Im Dreieck CAC2 gilt der Winkelsummensatz 🡺

🡺

Mit dem Nebenwinkelsatz folgt: q.e.d.

Kehrsatz des Stufenwinkelsatzes

Wenn Stufenwinkel gleich groß sind, dann sind die Geraden parallel.

Kontraposition:

Wenn die Geraden nicht parallel sind, dann sind die Stufenwinkel nicht gleich groß.



Voraussetzung: g und h sind nicht parallel

Behauptung:

Beweis:

Wenn g und h nicht parallel sind, dann schneiden g und h sich in einem Punkt C.

(dabei ist γ der Innenwinkel bei C)

Im Dreieck ACB gilt der Winkelsummensatz: 🡺

Zudem gilt: (Nebenwinkelsatz) 🡺 (1)

Einsetzen von (1) liefert: 🡺 also q.e.d.

„Es gibt keine Primzahl, die als Differenz von Quadraten nicht aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden kann.“ (Zertifikatsklausur 2014; Aufgabe 5b)

Kontraposition:

Wenn man eine natürliche Zahl als Differenz zweier nicht aufeinanderfolgenden Quadratzahlen schreiben kann, dann ist sie keine Primzahl.

Voraussetzung: mit und

Behauptung: mit und und

Beweis:

Dabei gilt: und q.e.d.

**5) Widerspruchsbeweis**

„ist irrational.“

Voraussetzung:

Behauptung: mit

Beweis: Annahme und ist ein vollständig gekürzter Bruch.

Es gilt: 🡺 🡺 2 teilt 🡺 2 teilt p 🡺

 🡺 🡺 2 teilt 🡺 2 teilt q 🡺

Daraus folgt:

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass vollständig gekürzt ist.

Also ist die Annahme falsch 🡺 q.e.d.

„Es gibt genau einen Primzahldrilling, nämlich 3, 5, 7.“

Voraussetzung: p ist eine Primzahl mit ; und sind Primzahlen

Behauptung:

Beweis:

Annahme: 🡺

Da p eine Primzahl ist, kann 3 kein Teiler von p sein.

Fall 1: mit 🡺

🡺 3 ist ein Teiler von 🡺 ist keine Primzahl (Widerspruch)

Fall 2: mit 🡺

🡺 3 ist ein Teiler von 🡺 ist keine Primzahl (Widerspruch)

Somit ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung . q.e.d.

„Es gibt unendlich viele Primzahlen“

Beweis:

Annahme 1: Es gibt nur endlich viele Primzahlen. Die Anzahl sei k.

🡺 Es gibt eine größte Primzahl, nennen wir sie .

Ordnet man die Primzahlen der Größe nach an, dann sind dies:

 ; ; … ; ;

Sei 🡺

Wenn n keine Primzahl ist, dann muss n durch mindestens eine der angeordneten Primzahlen teilbar sein.

Annahme 2: ist ein Teiler von n ( )

Da sicher ein Teiler von ist, muss auch ein Teiler von 1 sein.

🡺 Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass eine Primzahl ist.

🡺 Annahme 2 ist falsch 🡺 ist kein Teiler von n für alle .

🡺 n ist eine Primzahl 🡺 ist nicht die größte Primzahl 🡺 Annahme 1 ist falsch

Damit ist die Behauptung richtig. q.e.d.

**6) Vollständige Fallunterscheidung**

Der Satz vom Umfangswinkel (siehe Lösungen vollständige Fallunterscheidung)

 „Wählt man fünf beliebige natürliche Zahlen aus, so kann man unter diesen immer drei finden, deren Summe durch 3 teilbar ist.“

**KOM MOD E**

**0**

**1**

**2**

Man betrachtet alle fünf Zahlen Modulo 3.

D.h. für jede der fünf Zahlen gilt: mit

Fall 1: In einer der drei Schubladen befindet sich mindestens drei Zahlen.

Man wählt aus dieser Schublade k mit drei Zahlen aus.

Für die Summe s der Reste gilt: 🡺

Also ist die Summe S der drei Zahlen durch 3 teilbar.

Fall 2: In jeder der drei Schubladen befindet sich mindestens eine Zahl.

Man wählt aus jeder der Schubladen genau eine Zahl aus.

Für die Summe s der Reste gilt: 🡺

Also ist die Summe S der drei Zahlen durch 3 teilbar.

Da keine anderen Fälle eintreten können ist die Behauptung bewiesen. q.e.d.

„Für beliebige Zahlen gilt: “

Voraussetzung:

Behauptung:

Beweis:

Fall 1: 🡺

Fall 1a: 🡺 und 🡺

Fall 1b: 🡺 und 🡺

Fall 1c: und 🡺 und

 🡺

Fall 2: 🡺

Fall 2a: 🡺 und 🡺

Fall 2b: 🡺 und 🡺

Fall 2c: und x 🡺 und

 🡺

Da keine anderen Fälle auftreten können ist die Behauptung bewiesen. q.e.d.

**7) Vollständige Induktion**

Summenformeln: z.B.

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Teilbarkeit: z.B. „4 ist ein Teiler von .“

1) Induktionsanfang: 🡺 🡺 4 | 4

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt ( mit ) (\*)

Zu zeigen: ( mit )

Mit (\*) folgt:

 ( mit )

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Ungleichungen: z.B. „ für alle mit “

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

n.te Ableitungen: z.B. „Für die n-te Ableitung (; ) der Funktion f mit

 gilt: .“

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein mit k gilt (\*)

Zu zeigen:

Es gilt:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Geometrie: „Man kann in einem konvexen n- Eck durch Einzeichnen der Diagonalen

 verschiedene Dreiecke erzeugen.“

(1) Induktionsanfang: 🡺 =1

 In einem Dreieck kann man keine Diagonalen einzeichnen

 und somit kann man außer dem vorhandenen Dreieck

 kein weiteres Dreieck erzeugen.

 Somit ist die Behauptung für nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Bei einem k- Eck mit und k kann man

 Dreiecke erzeugen. (\*)

Zu zeigen: Bei einem - Eck kann man Dreiecke

 erzeugen.



Bestimmung der Anzahl der „neuen“ Dreiecke:

Der „neue“ Punkt bildet mit jedem Punktepaar mit und

 bzw. genau ein „neues“ Dreieck .

Anzahl der Punktepaare :

 🡺

 🡺

…

 🡺

Demnach gibt es genau Paare („Gauss- Trick“).

Herleitung des „Gauss- Trick“:

Aufgabe 1 vom Aufgabenblatt „Aufgaben zum Beweis durch vollständige Induktion“

Mit (\*) folgt für Anzahl a der Dreiecke im – Eck:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Geometrie: „Man kann mit Zirkel und Lineal immer ein Quadrat konstruieren, dessen

 Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Summe der Flächeninhalte von

 n ( gegebenen Quadraten.“

(1) Induktionsanfang:

Für gelingt die Konstruktion mithilfe des Satzes von Pythagoras.

Für die Flächeninhalte gilt: 

(2) Induktionsschritt: Für ein mit kann man ein Quadrat Q\* konstruier-

 en, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Summe der

 Flächeninhalte von k gegebenen Quadraten mit

 . D.h. (\*)

Zu zeigen: Wenn ein weiteres Quadrat hinzukommt, dann kann man ein

 Quadrat Q\*\* konstruieren, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die

 Flächeninhalte der Quadrate mit .

 D.h.

Mit(\*) folgt:

Man muss also ein Quadrat Q\*\* konstruieren, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate Q\* und .

Somit kann man erneut mithilfe des Satzes von Pythagoras das Quadrat Q\*\* konstruieren.



(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.