**Vertiefungskurs Mathematik**

**Lösungen: Aufgaben zum Beweis durch vollständige Induktion**

**AUFGABE 1**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 2**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt:

Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 3**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt:

Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 4**

(1) Induktionsanfang: 🡺 2

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d

**AUFGABE 5**

1) Induktionsanfang: 🡺 🡺 5 | 5

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt ( mit ) (\*)

Zu zeigen: ( mit )

Mit (\*) folgt:

( mit )

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 6**

(1) Induktionsanfang: 🡺 🡺 6 | 0

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt ( mit ) (\*)

Zu zeigen: ( mit )

Mit (\*) folgt:

Fall1: k ist gerade, d.h. mit

Fall2: k ist ungerade, also ist k + 1 ist gerade, d.h. mit

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 7** Für alle gilt: mit .

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt (\*)

Zu zeigen: ( mit )

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 8**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 9**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

Für n = 2 gilt 🡺 Für folgt demnach .

🡺

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 10**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein mit k gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 11**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein mit k gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

🡺

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 12**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein mit k gilt (\*)

Zu zeigen:

Es gilt:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 13**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein mit k gilt (\*)

Zu zeigen:

Es gilt:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 14**

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt:

Für ein mit k gilt (\*)

Zu zeigen:

D.h.

Es gilt:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 15**

(1) Induktionsanfang: 🡺

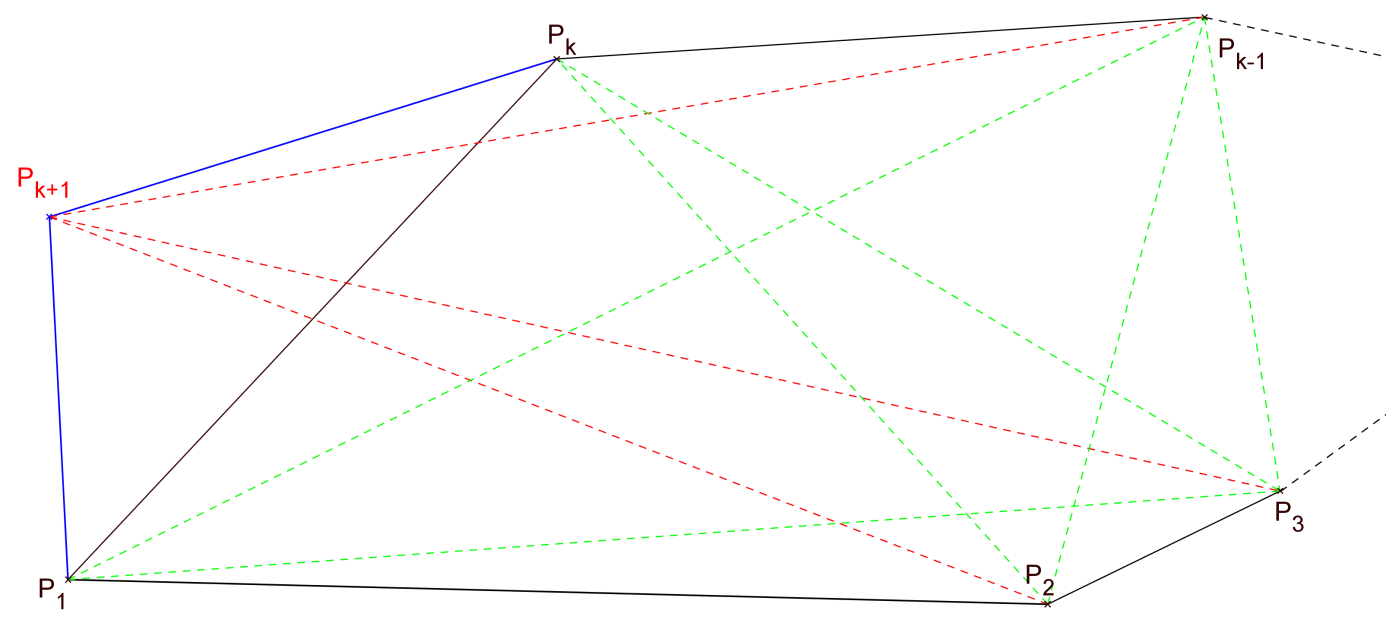
Da man in ein Dreieck keine einzige Diagonale einzeichnen kann, ist die Behauptung für nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Für ein mit k gilt für die Anzahl der Diagonalen in

einem konvexen k- Eck: (\*)

Zu zeigen: Für die Anzahl der Diagonalen in einem konvexen- Eck gilt

.



Alle „alten“ Diagonalen des k- Ecks sind auch Diagonalen des

- Ecks. Es kommen aber noch „neue“ Diagonalen hinzu.

Anzahl der „neuen“ Diagonalen, die hinzukommen:

Man kann die Verbindungsstrecke vom Punkt zu allen k Punkten mit

einzeichnen. Von diesen k verschiedenen Strecken sind zwei, nämlich und , Seiten des – Ecks (also keine Diagonalen).

Allerdings wird die „alte“ Seite jetzt zu einer Diagonalen.

🡺

Somit gilt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**AUFGABE 16**

(1) Induktionsanfang:

Da eine Gerade die Zeichenebene in genau zwei Gebiete zerlegt, ist die

Behauptung für nachgewiesen.

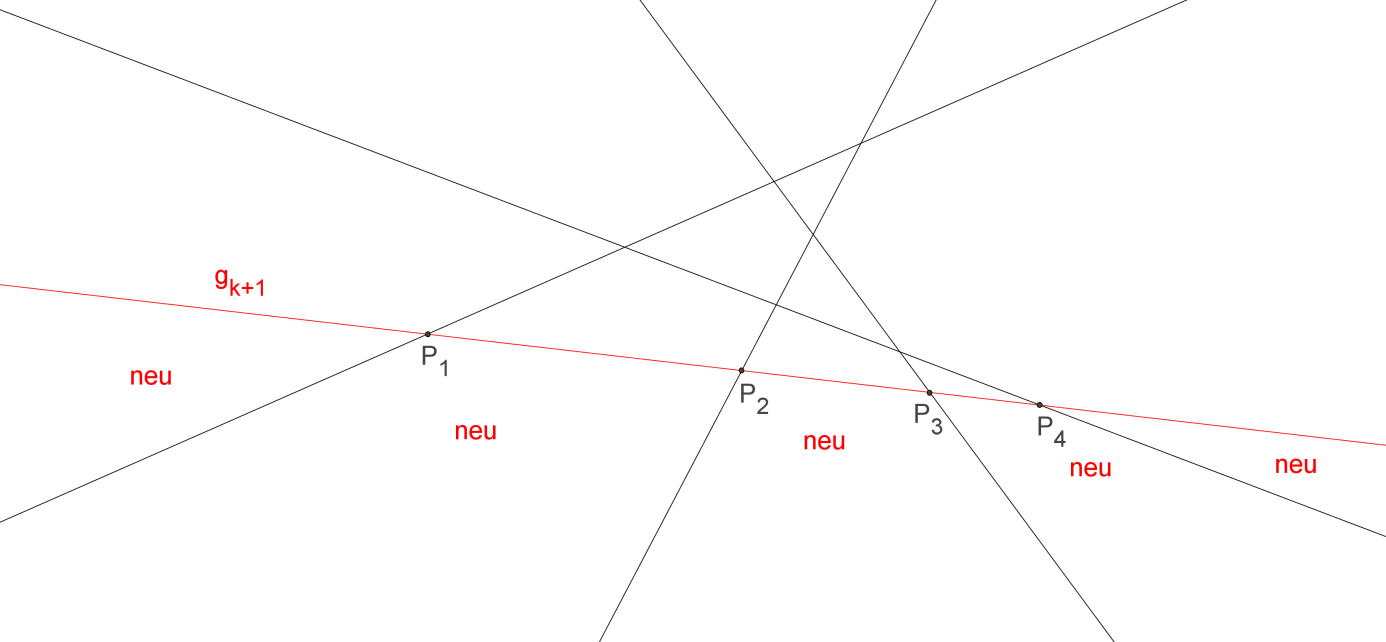
(2) Induktionsschritt: Für ein mit k gilt für die Anzahl der Gebiete

(\*)

Zu zeigen: Für die Anzahl der Gebiete gilt:

Die „neue“ Gerade schneidet die bisherigen k Geraden in maximal k ver-schiedenen Punkten mit . Diese k Punkte unterteilen die Gerade in maximal Teile (dies sind Strecken und zwei Halbgeraden). Diese Teile liegen in maximal Gebieten und zerlegen jedes dieser Gebiete in zwei Teile. Daher entstehen dadurch maximal „neue“ Gebiete.

Die Abbildung verdeutlicht die Situation für .



Somit gilt:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.