**Vertiefungskurs Mathematik**

**Lösungen: Übungen zum Beweisen**

**Satz 1** Beweis mit Wahrheitswerttabelle

γ

β

α

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | A ∧ B | ¬ A | ¬ A ∧ B | β ∨ A | α ⇒ γ |
| **f** | **f** | **f** | **w** | **f** | **f** | **w** |
| **f** | **w** | **f** | **w** | **w** | **w** | **w** |
| **w** | **f** | **f** | **f** | **f** | **w** | **w** |
| **w** | **w** | **w** | **f** | **f** | **w** | **w** |

Tautologie

**Satz 2** Beweis durch Widerspruch

Voraussetzung:

Behauptung: mit

Beweis: Annahme und ist ein vollständig gekürzter Bruch.

Es gilt: 🡺 🡺 3 teilt 🡺 3 teilt p 🡺

🡺 🡺 3 teilt 🡺 3 teilt q 🡺

Daraus folgt:

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass vollständig gekürzt ist.

Also ist die Annahme falsch 🡺 q.e.d.

**Satz 3** Beweis durch Kontraposition

Die Kontraposition des Satzes lautet:

Wenn n ungerade ist, dann ist nicht durch 4 teilbar.

Voraussetzung: mit

Behauptung: mit

Beweis:

mit

Da sicher ungerade ist, ist nicht durch 4 teilbar und somit ist auch nicht durch 4 teilbar. q.e.d.

**Satz** **4** Beweis durch Widerspruch

Voraussetzung: mit und mit

Behauptung: mit

Beweis: Annahme mit

mit

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch.

🡺 mit q.e.d.

**Satz 5** Beweis durch Gegenbeispiel

Man betrachtet alle sechs Zahlen Modulo 4.

D.h. für jede der sechs Zahlen gilt: x MOD(4) = k mit

**KOM MOD E**

**1**

**0**

**3**

**2**

Falls sich genau drei Zahlen in der Schublade 0 und genau drei Zahlen in der

Schublade 1 befinden, dann gilt für die Summe S von vier dieser Zahlen:

mit

Somit ist dann S nicht durch 4 teilbar.

Ein konkretes solches Zahlenbeispiel wäre z.B. : 20 ; 40 ; 60 ; 21 ; 41 ; 61 q.e.d.

**Satz 6** Beweis durch vollständige Fallunterscheidung

Fall 1:Es gibt eine Schublade, in der sich mindestens vier Zahlen befinden.

(z.B. in der Schublade r, mit r = 0; 1; 2 oder 3)

Man entnimmt vier Zahlen und bildet deren Summe .

Addiert man die vier Reste r, so erhält man .

Für die Summe s gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S = a + b + c + d durch 4

teilbar.

Fall 2: In jeder Schublade befinden sich höchstens drei Zahlen.

a) Auf einer der beiden Seiten der „Kommode“ (links oder rechts) befinden sich

mindestens fünf Zahlen.

(d.h. es sind zusammen 5 oder 6 Zahlen in den beiden Schubladen)

a1) Auf der linken Seite befinden sich mindestens fünf Zahlen.

D.h. in jeder Schublade auf der linken Seite befinden sich zwei oder drei Zahlen.

Man wählt aus jeder Schublade genau zwei Zahlen aus. Für die Summe der

Reste gilt .

Demnach gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S durch 4 teilbar.

a2) Auf der rechten Seite befinden sich mindestens fünf Zahlen.

D.h. in jeder Schublade auf der rechten Seite befinden sich zwei oder drei Zahlen.

Man wählt aus jeder Schublade genau zwei Zahlen aus. Für die Summe der

Reste gilt .

Demnach gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S durch 4 teilbar.

b) Auf einer der beiden Seiten (links oder rechts) befinden sich vier Zahlen und auf der anderen Seite drei Zahlen.

b1) Auf der linken Seite befinden sich vier Zahlen. D.h. in jeder der beiden Schub-laden befindet sich mindestens eine Zahl.

Da sich auf der rechten Seite drei Zahlen befinden, gibt es eine Schublade, in der sich mindestens zwei Zahlen befinden.

Man wählt aus den Schubladen 0 und 2 jeweils eine Zahl und zwei Zahlen aus

der Schublade der rechten Seite, in der sich mindestens zwei Zahlen befinden.

Für die Summe s der Reste gilt entweder oder

.

Demnach gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S durch 4 teilbar.

b2) Auf der rechten Seite befinden sich vier Zahlen. D.h. in jeder der beiden Schub-laden befindet sich mindestens eine Zahl.

Da sich auf der linken Seite drei Zahlen befinden, gibt es eine Schublade, in der sich mindestens zwei Zahlen befinden.

Man wählt aus den Schubladen 1 und 3 jeweils eine Zahl und zwei Zahlen aus

der Schublade der linken Seite, in der sich mindestens zwei Zahlen befinden.

Für die Summe s der Reste gilt entweder oder

.

Demnach gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S durch 4 teilbar.

Da keine anderen Fälle auftreten können, ist der Satz 6 bewiesen. q.e.d.

**Satz 7** Beweis durch vollständige Induktion

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt:

Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**Satz 8** Beweis durch vollständige Induktion

(1) Induktionsanfang: 🡺

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt (\*)

Zu zeigen:

Mit (\*) folgt:

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**Satz 9** Beweis durch vollständige Induktion

(1) Induktionsanfang: 🡺 🡺 3 | 21

(2) Induktionsschritt: Für ein gilt ( mit ) (\*)

Zu zeigen: ( mit )

Mit (\*) folgt:

( mit )

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

**Satz 10** Beweis durch vollständige Fallunterscheidung

Voraussetzung: und

Behauptung:

Beweis:

Wegen und

genügt zu zeigen, dass gilt.

Fall 1:

🡺 und

Da und gilt, folgt aus sofort auch

🡺

Fall 2:

🡺 und

Da und gilt, folgt aus sofort auch

🡺

Wegen und folgt .

Da keine anderen Fälle auftreten können ist der Satz bewiesen. q.e.d