**Grenzwert einer Folge – Lösungen**

**1.** a) g = 0: Sei ε > 0. Dann ist $\left|\frac{5}{n}-0\right|=\frac{5}{n}<ε ⟺ n>\frac{5}{ε}$.

Es ist n0 = 500 001.

 b) g = 1: Sei ε > 0. Dann ist $\left|\frac{n^{2}-1}{n^{2}}-1\right|=\frac{1}{n^{2}}<ε ⟺ n^{2}>\frac{1}{ε} ⟺ n>\sqrt{\frac{1}{ε}}$

 (denn n > 0). Es ist $\sqrt{100 000}≈316,23$, also n0 = 317.

 c) g = $\frac{1}{2}$: Sei ε > 0. Dann ist $\left|\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{n}<ε ⟺ n>\frac{1}{ε} $.

 Es ist n0 = 100 001.

 d) g = –2: Sei ε > 0. Dann ist $\left|\frac{\left(-1\right)^{n}-4n}{2n}-\left(-2\right)\right|=\left|\frac{\left(-1\right)^{n}}{2n}-2+2\right|=\frac{1}{2n}<ε $

 $⟺ n>\frac{1}{2ε}$. Es ist n0 = 50 001.

 e) g = 3: Sei ε > 0. Dann ist $\left|\frac{3n-1}{n+1}-3\right|=\left|\frac{3n-1-3(n+1)}{n+1}-2+2\right|=\frac{4}{n+1}<ε $

 $⟺ 4>ε∙\left(n+1\right) ⟺ 4<εn+ε ⟺ 4-ε<εn ⟺ n>\frac{4-ε}{ε}$.

 Es ist n0 = 400 000.

 f) g = 1: Sei ε > 0. Dann ist $\left|\frac{7n+n^{2}}{n^{2}}-1\right|=\left|\frac{7n+n^{2}-n^{2}}{n^{2}}\right|=\frac{7}{n}<ε ⟺ n>\frac{7}{ε}$.

 Es ist n0 = 700 001.

 g) g = 0: Sei ε > 0. Dann ist $\left|5∙\frac{1}{2^{n}}-0\right|=\frac{5}{2^{n}}<ε ⟺ 5<2^{n} ∙ε $

 $⟺ 2^{n}>\frac{5}{ε} ⟺ n>log\_{2}\left(\frac{5}{ε}\right)$.

Es ist n0 = 19.

 h) g = 3: Sei ε > 0. Dann ist $\left|\frac{3^{n+1}}{3^{n}+1}-3\right|=\left|\frac{3^{n+1}-3∙\left(3^{n}+1\right)}{3^{n}+1}\right|=\frac{3}{3^{n}+1}<ε $

 $⟺ 3<3^{n}∙ε+ε ⟺ 3^{n}>\frac{3-ε}{ε} ⟺ n>log\_{3}\frac{3-ε}{ε} $. Es ist n0 = 12.

**2.** a) $\frac{n^{2}-1}{n-1}=\frac{(n-1)(n+1)}{n-1}=n+1$, somit wächst $a\_{n}$ über jede Schranke hinaus.

 b) $a\_{n}=\left\{\begin{array}{c}2 , falls n gerade\\0 , falls n ungerade\end{array}\right.$ , somit liegen unendlich viele Glieder beliebig

 nahe bei 2 und unendlich viele Glieder beliebig nahe bei 0.

**3.** a) in Worten: Es gibt Abstände ε, für die es kein n0 mit der Eigenschaft gibt, dass

 ab da alle an einen kleineren Abstand zu g als ε haben.

 b) formal: $∃ε>0 ∀ n\_{0}\in N ∃n\geq n\_{0}: \left|a\_{n}-g\right|\geq ε$

**4.** Sei ε > 0. Dann ist (für n > 3): $\left|\frac{-3+4n}{n}-3\right|=\left|\frac{-3+4n-3n}{n}\right|=\frac{n-3}{n}<ε $

 $⟺ n-3<nε ⟺ n-nε<3 ⟺ n\left(1-ε\right)<3 ⟺ n<\frac{3}{1-ε}$

 (falls $1-ε>0).$ Es gibt also kein $n\_{0}$, so dass $\left|\frac{-3+4n}{n}-3\right|<ε $für alle $n\geq n\_{0}$

 gilt. Dies gilt nur für endlich viele n.

**5.** a) Gegenbeispiel: $a\_{n}=n$. Die Folge ist monoton zunehmend, aber nicht

 konvergent.

 b) Gegenbeispiel: $a\_{n}=1-\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}$. Die Folge ist konvergent mit Grenzwert 1, aber

 nicht monton.

 c) Gegenbeispiel: $a\_{n}=\left(-1\right)^{n}$. Die Folge ist divergent und beschränkt.

**6.** von links nach rechts:

 1) $a\_{n}=\frac{1}{n}$ und $b\_{n}=2-\frac{3}{n}$ 2) Es gibt keine Folge mit diesen Eig.

 3) $a\_{n}=\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}$ und $b\_{n}=\left(-0,6\right)^{n}$ 4) $a\_{n}=\left(-1\right)^{n}$ und $b\_{n}=\sin(\left(\frac{π}{2}∙n\right))$

 5) Es gibt keine Folge mit diesen Eig. 6) $a\_{n}=n$ und $b\_{n}=3^{n}$

 7) Es gibt keine Folge mit diesen Eig. 8) $a\_{n}=\left(-1\right)^{n}∙n$ und $b\_{n}=\left(-2\right)^{n}$

**7.** a) monoton zunehmend, da $a\_{n+1}-a\_{n}=\frac{3n+3}{n+2}-\frac{3n}{n+1}=\frac{\left(3n+3\right)\left(n+1\right)-3n\left(n+2\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}$

 $=\frac{3n^{2}+3n+3n+3-3n^{2}-6n}{(n+2)(n+1)}=\frac{3}{(n+2)(n+1)}>0$.

 beschränkt mit s = 0 und S = 3, da $\frac{3n}{n+1}<\frac{3n}{n}=3$.

 b) monoton abnehmend, da $\frac{a\_{n+1}}{a\_{n}}=\frac{\sqrt{\frac{n+2}{2n+2}}}{\sqrt{\frac{n+1}{2n}}}=\sqrt{\frac{n+2}{2n+2}∙\frac{2n}{n+1}}=\sqrt{\frac{2n^{2}+4n}{2n^{2}+4n+2}}<1$, da

 der Nenner größer als der Zähler ist.

 beschränkt mit $s=0$ und $S=a\_{1}=1$, da monoton abnehmend.