**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Lösungen: Zeichnerische Darstellung komplexer Wurzeln**

**1) Darstellung komplexer Einheitswurzeln**

Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^{n}=1$ in C.

Beispiel 1: n = 3 🡺 $z^{3}=1$

Beachte: Das Wurzelziehen die Umkehrung vom Potenzieren und es gilt: $e^{2πi}=1$

Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z\_{k}=e^{φ\_{k}∙i}$

Wenn man eine Zahl zk gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z\_{k}^{3}=\left(e^{φ\_{k}∙i}\right)^{3}=e^{3∙φ\_{k}∙i}=1=e^{2π∙i} $ Somit gilt für ϕk: $3∙φ\_{k}=k∙2π$

Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{2πi}=e^{4πi}$

Lösungen: $3∙φ\_{1}=2π$ 🡺 $φ\_{1}=\frac{2π}{3}$ 🡺 $z\_{1}=e^{\frac{2π}{3}∙i}$

 $3∙φ\_{2}=4π$ 🡺 $φ\_{2}=\frac{4π}{3}$ 🡺 $z\_{2}=e^{\frac{4π}{3}∙i}$

 $3∙φ\_{3}=6π$ 🡺 $φ\_{3}=\frac{6π}{3}=2π$ 🡺 $z\_{3}=e^{2π∙i}=1$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$$z\_{1}=e^{\frac{2π}{3}∙i}$$

$$z\_{2}=e^{\frac{4π}{3}∙i}$$

$$z\_{3}=1$$

Beispiel 2: n = 4 🡺 $z^{4}=1$

Die gesuchten Wurzeln haben wieder die Form: $z\_{k}=e^{φ\_{k}∙i}$

Wenn man eine Zahl zk gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z\_{k}^{4}=\left(e^{φ\_{k}∙i}\right)^{4}= e^{4∙φ\_{k}∙i}=1=e^{2π∙i}$ Somit gilt für ϕk: $4∙φ\_{k}=k∙2π$

Lösungen: $4∙φ\_{1}=2π$ 🡺$φ\_{1}=\frac{2π}{4}$ 🡺 $z\_{1}=e^{\frac{π}{2}∙i}$ ; $4∙φ\_{2}=4π$ 🡺 $φ\_{2}=\frac{4π}{4}$ 🡺 $z\_{2}=e^{π∙i}$

$4∙φ\_{3}=6π$ 🡺 $φ\_{3}=\frac{6π}{4}=\frac{3π}{2}$ 🡺 $z\_{3}=e^{\frac{3π}{2}∙i}$ ; $4∙φ\_{4}=8π$ 🡺 $φ\_{4}=\frac{8π}{4}=2π$ 🡺 $z\_{4}=1$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$$z\_{1}=e^{\frac{π}{2}∙i}$$

$$z\_{2}=e^{π∙i}$$

$$z\_{3}=e^{\frac{3π}{2}∙i}$$

$$z\_{4}=1$$

Beispiel 3: n = 5 🡺 $z^{5}=1$

Die gesuchten Wurzeln haben wieder die Form: $z\_{k}=e^{φ\_{k}∙i}$

Wenn man eine Zahl zk gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z\_{k}^{5}=\left(e^{φ\_{k}∙i}\right)^{5}=e^{5∙φ\_{k}∙i}=1=e^{2π∙i} $ Somit gilt für ϕk: $5∙φ\_{k}=k∙2π$

Lösungen: $5∙φ\_{1}=2π$ 🡺$φ\_{1}=\frac{2π}{5}$ 🡺 $z\_{1}=e^{\frac{2π}{5}∙i}$ ; $5∙φ\_{2}=4π$ 🡺 $φ\_{2}=\frac{4π}{5}$ 🡺 $z\_{2}=e^{\frac{4π}{5}∙i}$

$5∙φ\_{3}=6π$ 🡺 $φ\_{3}=\frac{6π}{5}$ 🡺 $z\_{3}=e^{\frac{6π}{5}∙i}$ ; $5∙φ\_{4}=8π$ 🡺 $φ\_{4}=\frac{8π}{5}$ 🡺 $z\_{4}=e^{\frac{8π}{5}∙i}$

$5∙φ\_{5}=10π$ 🡺 $φ\_{5}=2π$ 🡺 $z\_{5}=1$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$$z\_{1}=e^{\frac{2π}{5}∙i}$$

$$z\_{2}=e^{\frac{4π}{5}∙i}$$

$$z\_{3}=e^{\frac{6π}{5}∙i}$$

$$z\_{4}=e^{\frac{8π}{5}∙i}$$

$$z\_{5}=1$$

**2) Darstellung der Lösungen der Gleichung** $z^{n}=z\_{0}$ **mit** $z\_{0}=e^{φi}$

Beispiel 1: n = 3 🡺 $z^{3}=e^{\frac{π}{4}i}$

Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z\_{k}=e^{φ\_{k}∙i}$

Wenn man eine Zahl zk gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z\_{k}^{3}=\left(e^{φ\_{k}∙i}\right)^{3}=e^{3∙φ\_{k}∙i}=z\_{0}=e^{\frac{π}{4}∙i} $ Somit gilt für ϕk: $3∙φ\_{k}=\frac{π}{4}+(k-1)∙2π$

Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{\frac{π}{4}i}=e^{\frac{9π}{4}i}$

Lösungen: $3∙φ\_{1}=\frac{π}{4}$ 🡺 $φ\_{1}=\frac{π}{12}$ 🡺 $z\_{1}=e^{\frac{π}{12}∙i}$

 $3∙φ\_{2}=\frac{9π}{4}$ 🡺 $φ\_{2}=\frac{9π}{12}=\frac{3π}{4}$ 🡺 $z\_{2}=e^{\frac{3π}{4}∙i}$

 $3∙φ\_{3}=\frac{17π}{4}$ 🡺 $φ\_{3}=\frac{17π}{12}$ 🡺 $z\_{3}=e^{\frac{17π}{12}∙i}$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$$z\_{1}=e^{\frac{π}{12}∙i}$$

$$z\_{2}=e^{\frac{3π}{4}∙i}$$

$$z\_{3}=e^{\frac{17π}{12}∙i}$$

Wie hängen die beiden Darstellungen für n = 3 zusammen? (Vergleiche!)

Man stellt fest, dass das regelmäßige Dreieck durch Drehung um einen Winkel mit der Winkelweite $\frac{φ}{n}=\frac{π}{12}$ aus dem Dreieck entsteht, das auf der Seite 1 abgebildet ist.

(Die Eckpunkte des dortigen Dreiecks sind die Lösungen der Gleichung $z^{3}=1$ .)

Beispiel 2: n = 5 🡺 $z^{5}=e^{\frac{2π}{3}i}$

Die gesuchten Wurzeln haben die Form: $z\_{k}=e^{φ\_{k}∙i}$

Wenn man eine Zahl zk gefunden hat, dann kann man die Probe machen:

$z\_{k}^{5}=\left(e^{φ\_{k}∙i}\right)^{5}=e^{5∙φ\_{k}∙i}=e^{\frac{2π}{3}i} $ Somit gilt für ϕk: $5∙φ\_{k}=\frac{2π}{3}+(k-1)∙2π$

Tipp: Der Winkel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, es gilt z.B. $e^{\frac{2π}{3}i}=e^{\frac{8π}{3}i}$

Lösungen: $5∙φ\_{1}=\frac{2π}{3}$ 🡺$φ\_{1}=\frac{2π}{15}$ 🡺 $z\_{1}=e^{\frac{2π}{15}∙i}$ ; $5∙φ\_{2}=\frac{8π}{3}$ 🡺 $φ\_{2}=\frac{8π}{15}$ 🡺 $z\_{2}=e^{\frac{8π}{15}∙i}$

$5∙φ\_{3}=\frac{14π}{3}$ 🡺 $φ\_{3}=\frac{14π}{15}$ 🡺 $z\_{3}=e^{\frac{14π}{15}∙i}$ ; $5∙φ\_{4}=\frac{20π}{3}$ 🡺 $φ\_{4}=\frac{4π}{3}$ 🡺 $z\_{4}=e^{\frac{4π}{3}∙i}$

$5∙φ\_{5}=\frac{26π}{3}$ 🡺 $φ\_{5}=\frac{26π}{15}$ 🡺 $z\_{5}=e^{\frac{26π}{15}∙i}$

Wir wollen die komplexen Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:



Ergebnisse:

$$z\_{1}=e^{\frac{2π}{15}∙i}$$

$$z\_{2}=e^{\frac{8π}{15}∙i}$$

$$z\_{3}=e^{\frac{14π}{15}∙i}$$

$$z\_{4}=e^{\frac{4π}{3}∙i}$$

$$z\_{5}=e^{\frac{26π}{15}∙i}$$

Wie hängen die beiden Darstellungen für n = 5 zusammen? (Vergleiche!)

Man stellt fest, dass das regelmäßige Fünfeck durch Drehung um einen Winkel mit der Winkelweite $\frac{φ}{n}=\frac{2π}{15}$ aus dem Fünfeck entsteht, das auf der Seite 2 abgebildet ist.

(Die Eckpunkte des dortigen Fünfecks sind die Lösungen der Gleichung $z^{5}=1$ .)

Wie erhält man allgemein alle Lösungen der Gleichung $z^{n}=z\_{0}=e^{φ∙i}$ in C?

Allgemein gilt: $z\_{k}=e^{\left(\frac{φ}{n}+(k-1)∙\frac{2π}{n}\right)∙i}$ mit $k\in IN$ und $1\leq k\leq n$

Stellt man die komplexen Lösungen als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar, dann sind die n Punkte die Eckpunkte eines regelmäßigen n- Ecks, das den Einheits-kreis als Umkreis besitzt.

Es ist um einen Winkel mit der Winkelweite $\frac{φ}{n}$ gegenüber dem regelmäßigen n- Eck gedreht, dessen Eckpunkte die Lösungen der Gleichung $z^{n}=1$ sind.