**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Lösungen: Aufgaben zu Taylorreihen**

**AUFGABE 1**

a) $f\left(x\right)=e^{-x}$ ; $f^{'}\left(x\right)=-e^{-x}$ ; $f^{''}\left(x\right)=e^{-x}$ … $f^{(k)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{k}∙e^{-x}$

$$f^{(k)}\left(0\right)=\left(-1\right)^{k}$$

$$f\left(x\right)=\sum\_{k=0}^{\infty }\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!}∙x^{k}$$

Konvergenzradius: Quotientenkriterium

$\left|\frac{a\_{n}}{a\_{n+1}}\right|=\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{\left(n+1\right)!}}=\frac{\left(n+1\right)!}{n!}=n+1$ 🡺 Es gibt keinen Grenzwert

Also gilt: $r=\infty $

b) $g\left(x\right)=e^{x^{2}}$ ; $g^{'}\left(x\right)=2x∙e^{x^{2}}$ ; $g^{''}\left(x\right)=e^{x^{2}}∙\left(2+4x^{2}\right)$

 $g^{'''}\left(x\right)=e^{x^{2}}∙\left(12x+8x^{3}\right)$ ; $g^{(4)}\left(x\right)=e^{x^{2}}∙\left(12+48x^{2}+16x^{4}\right)$

 $g^{(5)}\left(x\right)=e^{x^{2}}∙\left(120x+160x^{3}+32x^{5}\right)$

 $g^{(6)}\left(x\right)=e^{x^{2}}∙\left(120+720x^{2}+480x^{4}+64x^{6}\right)$

 $g^{(k)}\left(0\right)=0$ für ungerade k 🡺 $a\_{k}=0$ für ungerade k

 $g\left(0\right)=1$ ; $g^{''}\left(0\right)=2$ ; $g^{(4)}\left(0\right)=12$ ; $g^{(6)}\left(0\right)=120$

 $a\_{0}=\frac{1}{0!}=1$ ; $ a\_{2}=\frac{2}{2!}=1$ ; $a\_{4}=\frac{12}{4!}=\frac{1}{2}$ ; $a\_{6}=\frac{120}{6!}=\frac{1}{6}$ … $a\_{2k}=\frac{1}{k!}$

$$g\left(x\right)=\sum\_{k=0}^{\infty }\frac{1}{k!}∙x^{2k}$$

Konvergenzradius: Quotientenkriterium

$\left|\frac{a\_{n}}{a\_{n+1}}\right|=\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{\left(n+1\right)!}}=\frac{\left(n+1\right)!}{n!}=n+1$ 🡺 Es gibt keinen Grenzwert

Also gilt: $r=\infty $

c) $h\left(x\right)=ln⁡\left(1-\frac{x}{2}\right)$ ; $h^{'}\left(x\right)=\frac{1}{x-2}$ ; $h^{''}\left(x\right)=-\frac{1}{\left(x-2\right)^{2}}$ ; $h^{'''}\left(x\right)=\frac{2}{\left(x-2\right)^{3}}$

 … $h^{(k)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{k+1}∙\frac{\left(k-1\right)!}{\left(x-2\right)^{k}}$ 🡺 $h^{(k)}\left(0\right)=\left(-1\right)^{k+1}∙\frac{\left(k-1\right)!}{\left(-2\right)^{k}}=-\frac{\left(k-1\right)!}{2^{k}}$

$$h\left(x\right)=\sum\_{k=0}^{\infty }-\frac{1}{k∙2^{k}}∙x^{k}$$

Konvergenzradius: Quotientenkriterium

$\left|\frac{a\_{n}}{a\_{n+1}}\right|=\frac{\frac{1}{n∙2^{n}}}{\frac{1}{\left(n+1\right)∙2^{n+1}}}=\frac{\left(n+1\right)∙2^{n+1}}{n∙2^{n}}=\frac{2∙\left(n+1\right)}{n}$ 🡺 $\lim\_{n\to \infty }\left|\frac{a\_{n}}{a\_{n+1}}\right|=\lim\_{n\to \infty }\frac{2∙\left(n+1\right)}{n}=2$

Also gilt: $r=2$

d) $i(x)=\frac{1}{1+x}$ ; $i^{'}\left(x\right)=-\frac{1}{\left(1+x\right)^{2}}$ ; $i^{''}\left(x\right)=\frac{2}{\left(1+x\right)^{3}}$ ; $i^{'''}\left(x\right)=-\frac{6}{\left(1+x\right)^{4}}$

 … $i^{(k)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{k}∙\frac{k!}{\left(1+x\right)^{k+1}}$ 🡺 $i^{(k)}\left(0\right)=\left(-1\right)^{k}∙k!$

$$i\left(x\right)=\sum\_{k=0}^{\infty }\frac{\left(-1\right)^{k}∙k!}{k!}∙x^{k}=\sum\_{k=0}^{\infty }\left(-1\right)^{k}∙x^{k}$$

Konvergenzradius: Quotientenkriterium

$\left|\frac{a\_{n}}{a\_{n+1}}\right|=\frac{1}{1}=1$ 🡺 $\lim\_{n\to \infty }\left|\frac{a\_{n}}{a\_{n+1}}\right|=1$

Also gilt: $r=1$

**AUFGABE 2** Bestimme jeweils das Taylorpolynom p5 (d.h. vom Grad 5) um die Entwicklungsmitte x0 = 0.

Berechne jeweils die prozentuale Abweichung von p5(1) von f(1).

a) $f\left(x\right)=\sqrt{1+x}=\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}$ ; $f^{'}\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(1+x\right)^{- \frac{1}{2}}$ ; $f^{''}\left(x\right)=-\frac{1}{4}\left(1+x\right)^{- \frac{3}{2}}$

 $f^{'''}\left(x\right)=\frac{3}{8}\left(1+x\right)^{- \frac{5}{2}}$ ; $f^{(4)}\left(x\right)=-\frac{15}{16}\left(1+x\right)^{- \frac{7}{2}}$ ; $f^{(5)}\left(x\right)=\frac{105}{32}\left(1+x\right)^{- \frac{9}{2}}$

 $a\_{0}=\frac{1}{0!}=1$ ; $a\_{1}=\frac{\frac{1}{2}}{1!}=\frac{1}{2}$ ; $ a\_{2}=-\frac{\frac{1}{4}}{2!}=-\frac{1}{8}$ ; $a\_{3}=\frac{\frac{3}{8}}{3!}=\frac{1}{16}$ ; $a\_{4}=-\frac{\frac{15}{16}}{4!}=-\frac{5}{128}$

 $a\_{5}=\frac{\frac{105}{32}}{5!}=\frac{7}{256}$ 🡺 $p\_{5}\left(x\right)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^{2}+\frac{1}{16}x^{3}-\frac{5}{128}x^{4}+\frac{7}{256}x^{5}$

 $f\left(1\right)=\sqrt{2}$ ; $p\_{5}\left(1\right)=\frac{365}{256}$ 🡺 $\frac{\frac{365}{256}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}∙100\%≈0,818\%$

b) $f\left(x\right)=\tan((x))$ ; $f^{'}\left(x\right)=\frac{1}{\left(cos⁡(x)\right)^{2}}$ ; $f^{''}\left(x\right)=\frac{2sin⁡(x)}{\left(cos⁡(x)\right)^{2}}$

 $f^{'''}\left(x\right)=-\frac{4}{\left(cos⁡(x)\right)^{2}}+\frac{6}{\left(cos⁡(x)\right)^{4}}$ ; $f^{(4)}\left(x\right)=-\frac{8sin⁡(x)}{\left(cos⁡(x)\right)^{3}}+\frac{24sin⁡(x)}{\left(cos⁡(x)\right)^{5}}$

 $f^{(5)}\left(x\right)=\frac{16}{\left(cos⁡(x)\right)^{2}}-\frac{120}{\left(cos⁡(x)\right)^{4}}+\frac{120}{\left(cos⁡(x)\right)^{6}}$

 $a\_{0}=\frac{0}{0!}=0$ ; $a\_{1}=\frac{1}{1!}=1$ ; $ a\_{2}=\frac{0}{2!}=0$ ; $a\_{3}=\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$ ; $a\_{4}=\frac{0}{4!}=0$

 $a\_{5}=\frac{16}{5!}=\frac{2}{15}$ 🡺 $p\_{5}\left(x\right)=x+\frac{1}{3}x^{3}+\frac{2}{15}x^{5}$

 $p\_{5}\left(1\right)=\frac{22}{15} $🡺 $\frac{\tan(\left(1\right))-\frac{22}{15}}{tan(1)}∙100\%≈5,826\%$

c) $f\left(x\right)=\arcsin((x))$ ; $f^{'}\left(x\right)=\left(1-x\right)^{- \frac{1}{2}}$ ; $f^{''}\left(x\right)=x∙\left(1-x\right)^{- \frac{3}{2}}$

 $f^{'''}\left(x\right)=\left(1+2x^{2}\right)∙\left(1-x\right)^{- \frac{5}{2}}$ ; $f^{(4)}\left(x\right)=\left(9x+6x^{3}\right)∙\left(1-x\right)^{- \frac{7}{2}}$

$ $ $f^{(5)}\left(x\right)=\left(9+72x^{2}+24x^{4}\right)∙\left(1-x\right)^{- \frac{9}{2}}$

 $a\_{0}=\frac{0}{0!}=0$ ; $a\_{1}=\frac{1}{1!}=1$ ; $ a\_{2}=\frac{0}{2!}=0$ ; $a\_{3}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ ; $a\_{4}=\frac{0}{4!}=0$

 $a\_{5}=\frac{9}{5!}=\frac{3}{40}$ 🡺 $p\_{5}\left(x\right)=x+\frac{1}{6}x^{3}+\frac{3}{40}x^{5}$

 $p\_{5}\left(1\right)=\frac{149}{120} $🡺 $\frac{\arcsin(\left(1\right))-\frac{149}{120}}{arcsin(1)}∙100\%=\frac{\frac{π}{2}-\frac{149}{120}}{\frac{π}{2}}∙100\%≈20,95\%$

d) $f\left(x\right)=\sinh(\left(x\right)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2})$ ; $f^{'}\left(x\right)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=cosh⁡(x)$

 $f^{''}\left(x\right)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=sinh⁡(x)$ ; $f^{'''}\left(x\right)=cosh⁡(x)$ ;$ f^{(4)}\left(x\right)=sinh⁡(x)$

 $f^{(5)}\left(x\right)=cosh⁡(x)$

 $a\_{0}=\frac{0}{0!}=0$ ; $a\_{1}=\frac{1}{1!}=1$ ; $ a\_{2}=\frac{0}{2!}=0$ ; $a\_{3}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ ; $a\_{4}=\frac{0}{4!}=0$

 $a\_{5}=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$ 🡺 $p\_{5}\left(x\right)=x+\frac{1}{6}x^{3}+\frac{1}{120}x^{5}$

 $p\_{5}\left(1\right)=\frac{47}{40} $🡺 $\frac{\sinh(\left(1\right))-\frac{47}{40}}{sinh(1)}∙100\%≈0017\%$

**AUFGABE 3**

a) $f\left(x\right)=x∙e^{x}$ ; $f^{'}\left(x\right)=e^{x}+x∙e^{x}=(x+1)∙e^{x}$

$f^{''}\left(x\right)=e^{x}+(x+1)∙e^{x}=(x+2)∙e^{x}$ ; $ f^{'''}\left(x\right)=(x+3)∙e^{x}$

$f^{(k)}\left(x\right)=\left(x+k\right)∙e^{x}$ 🡺 $f^{(k)}\left(1\right)=\left(1+k\right)∙e^{1}=e∙\left(1+k\right)$

$a\_{k}=\frac{e∙(1+k)}{k!}$

$$f\left(x\right)=\sum\_{k=0}^{\infty }\frac{e∙\left(1+k\right)}{k!}∙\left(x-1\right)^{k}$$

b) $g\left(x\right)=\cosh(\left(x\right)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2})$ ; $g^{'}\left(x\right)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=sinh⁡(x)$

$g^{''}\left(x\right)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=cosh⁡(x)$ ; $g^{'''}\left(x\right)=sinh⁡(x)$ ;$ g^{(4)}\left(x\right)=cosh⁡(x)$

$a\_{k}=\frac{1}{k!}$ für gerade k (d.h k = 2m) ; $a\_{k}=0$ für ungerade k

$$g\left(x\right)=\sum\_{m=0}^{\infty }\frac{1}{(2m)!}∙x^{2m}$$