**ZPG Vertiefungskurs Mathematik**

**Mögliche Stundenverteilung zum Thema Taylorreihen (12 h)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nr | Inhalte | Begleitmaterial |
| 1/2 | Einstieg in das Thema Reihen  Definition einer Reihe auf Basis einer Folge  Beispiele für Reihen:  Arithmetische Reihe ; Geometrische Reihe    Beispiele für geometrische Reihen  Unendliche geometrische Reihe  (für )  Anwendungen unendlicher geometrischer Reihen: periodische Brüche |  |
| 3/4 | Divergenz der harmonischen Reihe mithilfe des Minorantenkriteriums  Anwendung des Majorantenkriteriums  Beispiel:  Leibniz- Kriterium für alternierende Reihen die auf monotonen Nullfolgen basieren  Beispiel:  Auch Rechnereinsatz zur Bestimmung des Grenzwerts (hier: ) |  |
| 5/6 | Einstieg Taylorreihe  Wie berechnet ein Taschenrechner Sinuswerte?  Beispiel: f(x) = sin(x)  Gesucht ist ein Polynom pn(x), zur näherungs-weisen Berechnung von Sinuswerten  Zunächst „übliche“ Methode mit n + 1 Stützstellen (Beispiele: p3(x) und p5(x))  Idee von Taylor mit Entwicklungsmitte x0 = 0.  (n = 3, 5, 7 und 9) (auch grafische Überprüfung) |  |
| Nr | Inhalte | Begleitmaterial |
| 7/8 | Definition des allgemeinen Taylorpolynoms mit der Entwicklungsmitte x0 = 0.  Taylorreihe für f mit f(x) = sin(x)  Definition der allgemeinen Taylorreihe mit der Entwicklungsmitte x0 = 0.  Übung: Taylorreihen für cos(x) und ex  (auch )  Taylorreihe für f mit f(x) = ln(x)  Entwicklungsmitte x0 = 1 |  |
| 9/10 | Konvergenz von Taylorreihen betrachten  Beispiel:  Weitere Taylorreihen für den natürlichen Logarithmus:  Transformation:  Definition des Konvergenzradius einer Taylorreihe  Anwendung des Wurzelkriteriums und des Quotientenkriteriums zur Bestimmung des Konvergenzradius (nur Mitteilung) |  |
| 11/12 | Übungsaufgaben zu Taylorreihen, teilweise auch mit Bestimmung des Konvergenzradius | Aufgaben zu Taylorreihen |

ZPG Vertiefungskurs Mathematik

Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „Taylorreihen“

Der vorgestellte Unterrichtsgang „Taylorreihen“ wurde in der Klassenstufe 12 in

sechs Doppelstunden unterrichtet. Insgesamt war bei diesem inhaltlich eher

schweren Thema der Anteil der Lehrervorträge relativ hoch im Vergleich mit den

anderen Unterrichtseinheiten. Allerdings ist dies im Hinblick, dass der Vertiefungs-

kurs Mathematik die Schülerinnen und Schüler auch auf die Vorlesungen an den

Hochschulen vorbereiten soll, nicht von Nachteil. Bevor die Taylorreihen behandelt

wurden, waren zunächst einige klassische Reihen und deren Grenzwerte betrachtet

worden.

Taylorpolynome (benannt nach dem britischen Mathematiker Brook Taylor 1685 –

1731) dienen hauptsächlich dazu, beliebig oft differenzierbare Funktionen (sog. glatte

Funktionen) beliebig genau approximieren zu können. Außerdem kann man mithilfe

von Taylorpolynomen, durch gliedweises Integrieren, näherungsweise Integrale von

Funktionen, deren Stammfunktion man nicht kennt, berechnen.

Das Polynom heißt Taylorpolynom vom Grad n mit der

Entwicklungsmitte . Falls man den Grenzübergang durchführt, erhält man

die sog. Taylorreihe der Funktion f:

Im Sonderfall spricht man auch von einer Maclaurinschen Reihe von f:

(Colin Maclaurin 1698 – 1746 war ein brit. Mathematiker)

In der ersten Doppelstunde wurde zunächst der Begriff der „Reihe“ grundlegend

auf der Basis einer Folge (an) definiert. Die Schülerinnen und Schüler lernten eine

Reihe als eine Folge von Teilsummen sn von Folgegliedern an kennen. Anschließend

wurden die Sonderfälle arithmetische und geometrische Reihe behandelt. Dabei ist

insbesondere die Frage, ob und unter welcher Bedingung Grenzwerte dieser Reihen

existieren untersucht worden. Dazu wurde die Beziehung

im Plenum hergeleitet. Damit wurde dann für eine Formel zur Berechnung

des Grenzwerts einer geometrischen Reihe gefunden.

Abschließend wurde als Anwendung der geometrischen Reihen die Umwandlung

einer periodischen Dezimalzahl (z.B. und ) in einen Bruch thematisiert.

In der zweiten Doppelstunde wurde zunächst die Divergenz der harmonischen Reihe

mithilfe des Minorantenkriteriums nachgewiesen. Anschließend wurde die Konver-

genz einer Reihe mithilfe des Majorantenkriteriums begründet. Danach wurde noch

das Leibniz- Kriterium für alternierende Reihen, die auf Nullfolgen beruhen, behan-

delt. Abschließend wurde mithilfe des WTR näherungsweise der Grenzwert der

alternierenden Reihe bestimmt (ln(2)).

In der dritten Doppelstunde wurde als Einstieg in das Thema „Taylorreihen“ die Frage

gestellt: „Wie berechnet ein Taschenrechner Sinuswerte“? Dabei wurde den Schüler-

innen und Schülern zuerst klar gemacht, dass einem Taschenrechner die Definition

des Sinus als Verhältnis zweier Seiten nicht einprogrammiert werden kann. Da ein

Taschenrechner eigentlich nur die Grundrechenarten ausführen kann, wurde das Ziel

formuliert, die Sinusfunktion durch eine ganzrationale Funktion anzunähern.

Um den Schülerinnen und Schülern die Eleganz und die relativ einfache Bestimmung

der Taylorpolynome (bzw. Taylorreihen) zu verdeutlichen, wurde zunächst eine

Näherungsfunktion nach der bekannten Methode (Vorgabe von Stützstellen)

vorgenommen. Die dabei auftretenden linearen Gleichungssysteme sind mit wach-

sendem n immer aufwändiger zu lösen. Zudem müssen alle Koeffizienten bei jeder

neuen Näherung (d.h. mit wachsendem n) neu berechnet werden.

Danach wurde in einem Lehrervortrag die Idee von Taylor erläutert, ein Näherungs-

polynom vom Grade n für sin(x) zu gewinnen. Dabei wurde die Entwicklungsmitte

gewählt. Die Schülerinnen und Schüler waren zunächst sehr überrascht, dass

man eine Funktion annähern kann, obwohl man nur Informationen von einer Stelle

verwendet.

Anschließend wurden die Taylorpolynome für n = 3, 5, 7 und 9 bestimmt und die

Güte der Näherungspolynome auch graphisch (GTR) veranschaulicht.

(Die ausführliche Durchführung wird in der Datei 04 beschrieben.)

In der vierten Doppelstunde wurde zunächst eine allgemeine Definition eines Taylor-

polynoms mit der Entwicklungsmitte eingeführt. Anschließend wurde für das

Beispiel der Übergang zur Taylorreihe vollzogen. Die Tatsache, dass

man die Sinusfunktion durch ein Taylorpolynom beliebig genau approximieren kann,

falls man nur n groß genug wählt, hat die Schülerinnen und Schüler sehr überrascht.

Dann wurde die allgemeine Definition einer Taylorreihe einer Funktion f besprochen.

Anschließend bestimmten die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit die Taylor-

Reihen für und (siehe auch Datei 05). Dann wurde im Plenum das Problem

erörtert, dass man für eine Taylorreihe für ln(x) nicht die Entwicklungsmitte

verwenden kann. Dabei wurde den Schülerinnen und Schülern nicht von vorneherein

die Schreibweise mit den Potenzen von vorgegeben. Erst im Laufe des

Beispiels hatte sich diese Schreibweise als vorteilhaft herausgestellt (siehe auch

Datei 06).

Zu Beginn der fünften Doppelstunde wurde die Konvergenz der Taylorreihe für

mit der Entwicklungsmitte ( ) mithilfe des WTR unter-

sucht und zudem mit einem GTR veranschaulicht. Anschließend wurde durch eine

Substitution die Taylorreihe für gewonnen. Da die bisherigen Taylorreihen

für den natürlichen Logarithmus, wegen deren langsamen Konvergenz, nicht beson-

ders für die näherungsweise Berechnung von Logarithmuswerten geeignet sind,

wurde im weiteren Verlauf des Unterrichts die effektivere Taylorreihe für

behandelt (siehe auch Datei 07).

Danach wurde in einem Lehrervortrag der Begriff des „Konvergenzradius“ einer

Taylorreihe definiert und dessen mögliche Berechnung mithilfe des Quotienten-

kriteriums bzw. Wurzelkriteriums aufgezeigt. Abschließend wurde der Konvergenz-

radius der Taylorreihen von , und bestimmt (siehe auch Datei 08).

Die sechste Doppelstunde war eine reine Übungsstunde, in der die Schülerinnen und

Schüler Aufgaben eines Aufgabenblattes zu den Taylorreihen (Datei 11) bearbeite-

ten. Die Lösungen dieser Aufgaben (Datei 21) lagen im Klassenraum zur Selbst-

kontrolle aus.

**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Einstieg zum Thema „Taylorreihen“**

Die Einstiegsfrage „Wie berechnet ein Taschenrechner Sinuswerte?“ führt zunächst

auf die Bestimmung einer ganzrationalen Näherungsfunktion für die Sinusfunktion.

Um die Eleganz und die relativ einfache Bestimmung der Taylorpolynome (bzw.

Taylorentwicklungen) den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, wurde

zunächst eine Näherungsfunktion nach der, für die Schülerinnen und Schüler

„üblichen“ Methode (Vorgabe von Stützstellen) vorgenommen.

Die dabei auftretenden linearen Gleichungssysteme (LGS) werden mit wachsendem

n immer aufwändiger zu lösen. Zudem müssen alle Koeffizienten bei jeder neuen

Näherung (d.h. mit wachsendem n) neu berechnet werden.

Danach empfinden die Schülerinnen und Schüler die Methode von Taylor, bei der

nur ein weiterer Koeffizient neu berechnet werden muss (die anderen Koeffizienten

bleiben erhalten), als eine willkommene Erleichterung.

Bestimmung einer ganzrationalen Näherungsfunktion mithilfe von Stützstellen

Beispiel 1: Näherungsfunktion 3.Grades (Graph punktsymmetrisch zum Ursprung)

Man benötigt wegen der Symmetrie nur zwei, statt vier Stützstellen.

und

Ansatz:

Bedingungen:

Man erhält ein LGS mit zwei Gleichungen für die beiden Variablen a und b:

Aus folgt:

Einsetzen in (II) liefert: 🡺

Beispiel 2: Näherungsfunktion 5.Grades (Graph punktsymmetrisch zum Ursprung)

Man benötigt wegen der Symmetrie nur drei, statt sechs Stützstellen.

, und

Ansatz:

Bedingungen:

Man erhält ein LGS mit drei Gleichungen für die Variablen a, b und c:

Aus und folgt:

Aus folgt:

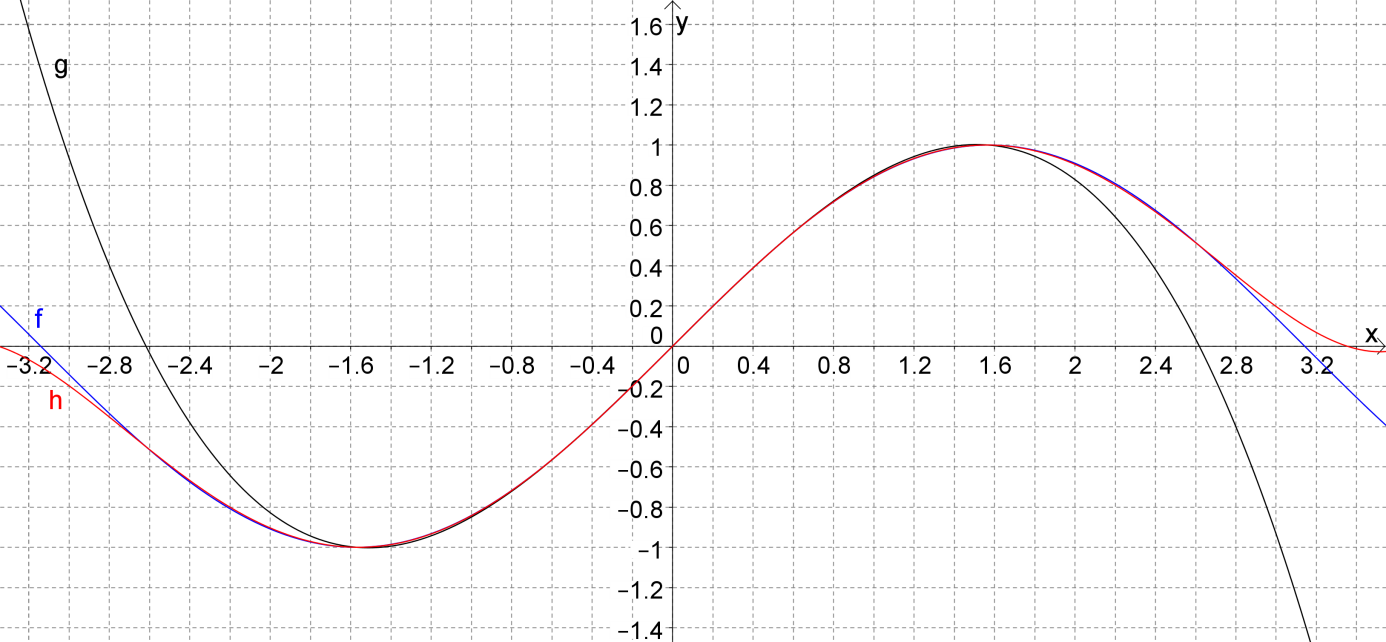
Einsetzen in (IV) liefert:

Einsetzen in (II) liefert: 🡺

Man sieht sofort, dass sich bei der besseren Näherung 5.Grades auch die Koeffizien-

ten a und b verändern und jedesmal neu berechnet werden müssten.

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit der beiden Näherungsfunktionen.



Um die Genauigkeit der Näherung zu veranschaulichen kann man z.B. die

Funktionswerte von f und h an der Stelle vergleichen.

;

Obwohl der Graph (wegen der Skalierung) eine gute Näherung auf dem Intervall

suggeriert, ist die Abweichung noch weit von der Rechnergenauigkeit

(in der Regel 10 Dezimalen) entfernt. Schon die dritte Dezimale ist falsch.

Somit können die Schülerinnen und Schüler einigermaßen abschätzen, wie auf-wändig es wäre ein LGS für eine hinreichend gute Näherungsfunktion zu lösen.

Anschließend wird den Schülerinnen und Schülern die Idee von Taylor erläutert.

Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass man nur eine Entwicklungsmitte

verwendet, dafür aber neben dem Funktionswert auch noch die Funktionswerte mehrerer Ableitungsfunktionen von f berücksichtigt.

Um die Vorgangsweise besser zu veranschaulichen, beginnt man mit dem Taylor-polynom 1.Grades (also der Tangentenfunktion an der Stelle )

Taylorpolynom 1.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen: und

;

🡺

Taylorpolynom 2.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen: und und

; ;

🡺

🡺

Taylorpolynom 3.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen:

und und und

; ;

🡺

🡺

🡺

Man erkennt, dass immer nur ein neuer Koeffizient, nämlich berechnet werden muss, alle anderen Koeffizienten mit bleiben gleich.

Zudem sind alle Koeffizienten mit geradem i Null, da gilt. Außerdem sind alle Koeffizienten mit positiv und alle Koeffizienten mit

negativ.

Da die ungeraden Ableitungen von f an der Stelle entweder den Wert 1 oder – 1 besitzen, gilt für die Koeffizienten mit ungeradem i:

für bzw. für

Somit lauten weitere Taylorpolynome von f:

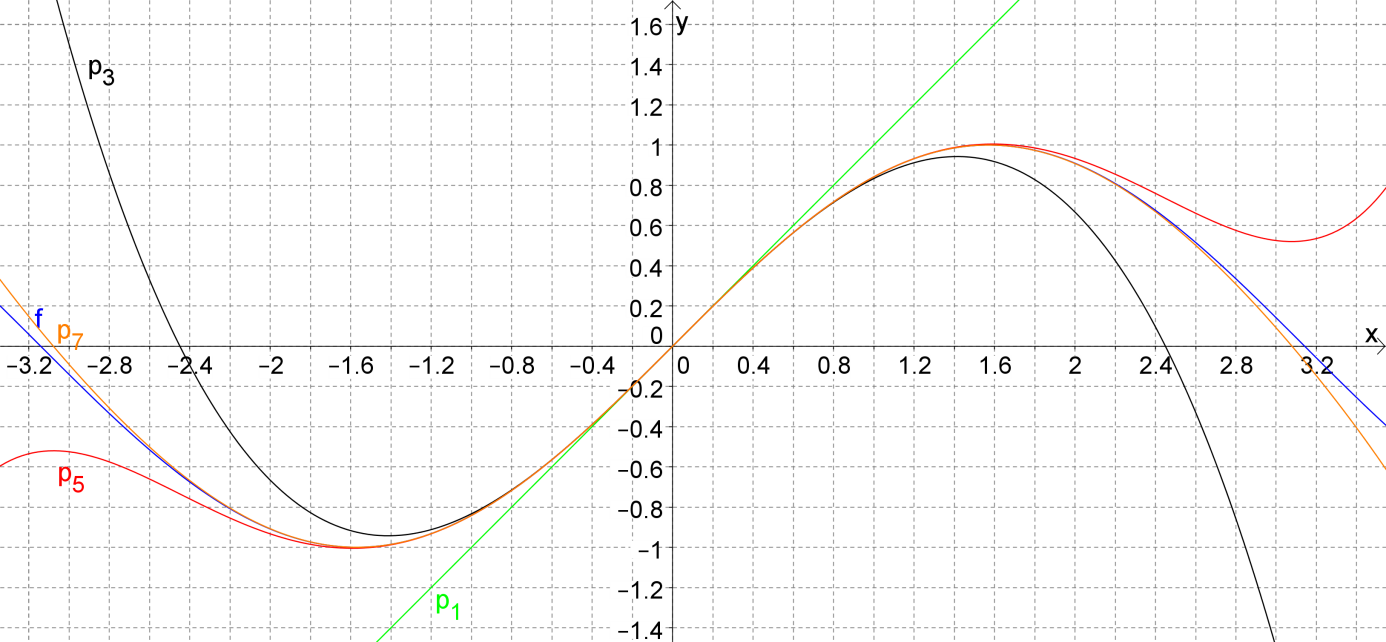
Allgemein gilt:

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass man ohne großen Aufwand schnell weitere Koeffizienten und damit Taylorpolynome berechnen kann.

Dies liegt daran, dass bei der Entwicklungsmitte nur der Koeffizient ohne x einen Beitrag zum Wert von liefert ().

Der Vorteil der Taylorpolynome gegenüber den „Stützstellenpolynomen“ ist damit klar aufgezeigt, denn ein mühseliges Lösen von sehr großen LGS entfällt.

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



Um die Genauigkeit der Näherung durch das Taylorpolynom zu veranschaulichen

kann man z.B. die Funktionswerte von f und an der Stelle vergleichen.

;

Hier stimmen schon die ersten vier Dezimalen überein. Schon das Taylorpolynom

berechnet einen Näherungswert für der sich auf Rechnergenauigkeit

(10 Dezimalen) nicht mehr von unterscheidet.

Im weiteren Unterrichtsverlauf wird dann die Taylorreihe für definiert, die die

Funktion beliebig gut annähert und somit mit f gleichgesetzt werden kann:

**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Weitere Beispiele für Taylorreihen mit**

Nachdem man die Taylorreihen z.B. am Beispiel 1 der Sinusfunktion im Plenum

eingeführt hat, können die Schülerinnen und Schüler z.B. die Taylorreihe für f mit

und selbst bestimmen.

Die Taylorreihe einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion f mit der Entwicklungsmitte lautet:

Beispiel 2: ;

Es gilt: ; ; ;

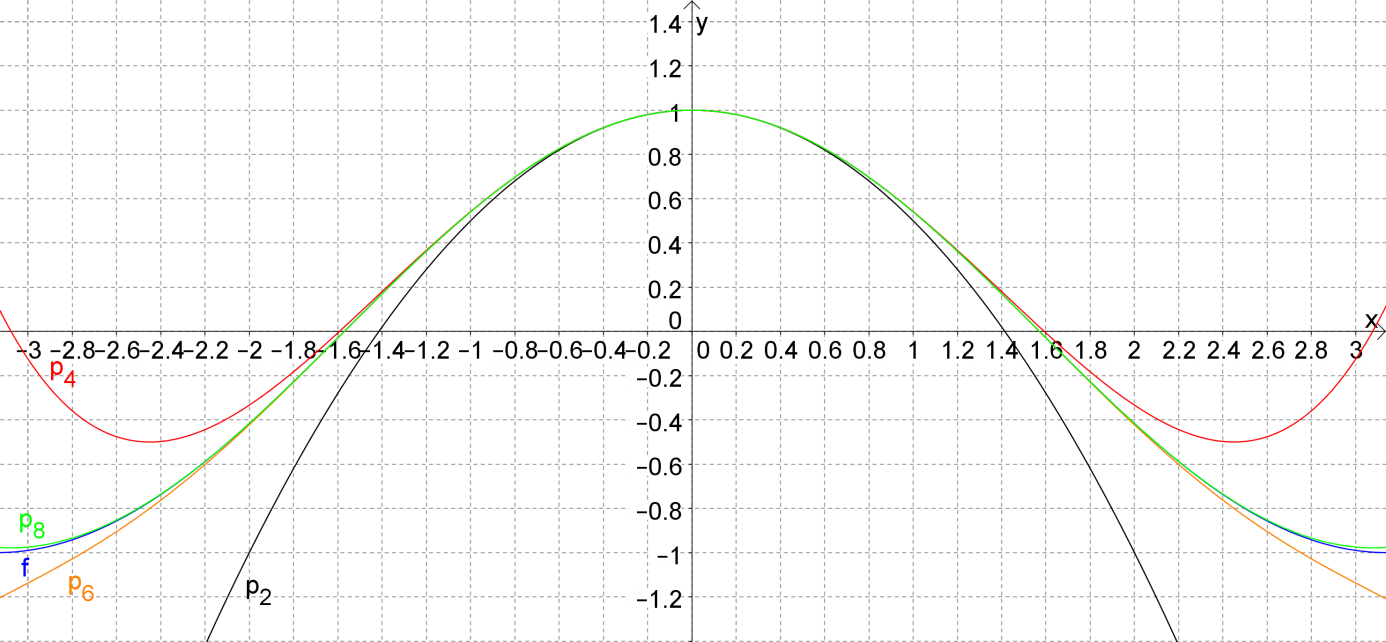
🡺

🡺

🡺

Somit lautet die Taylorreihe für :

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



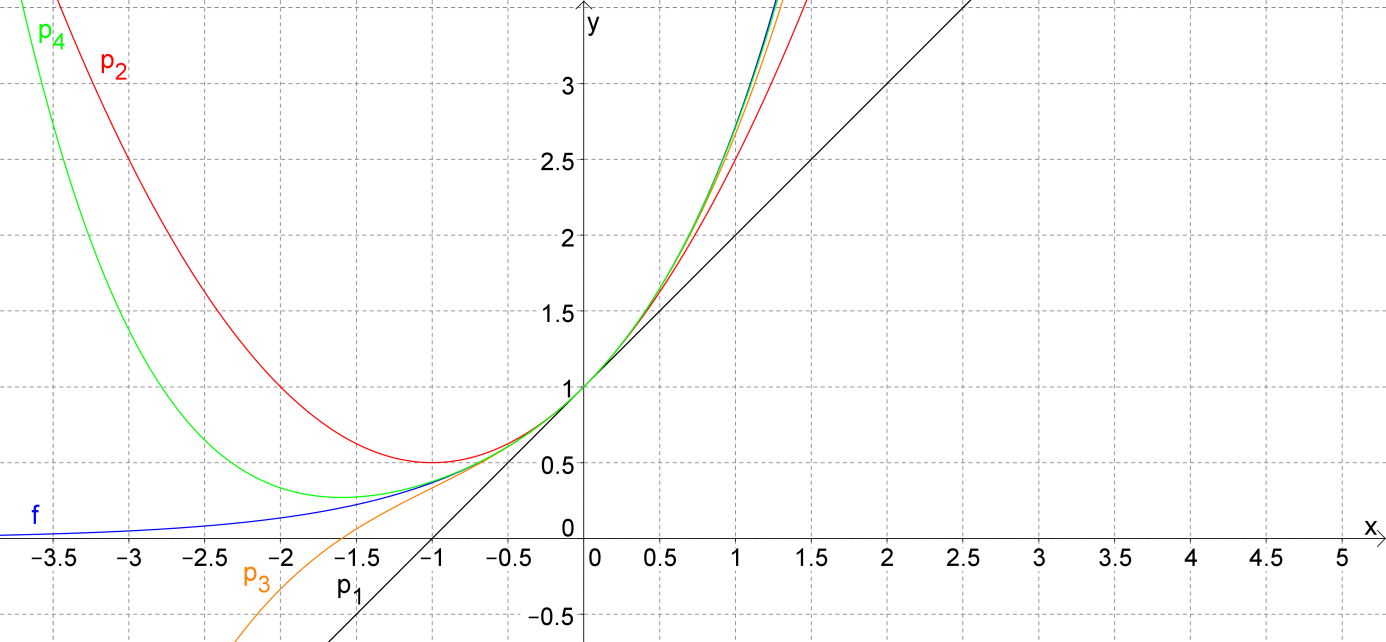
Beispiel 3: ;

Es gilt:

🡺

Somit lautet die Taylorreihe für :

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Beispiel für eine Taylorreihe mit**

Ein geeignetes Beispiel, für eine Entwicklungsmitte ist die natürliche

Logarithmusfunktion, da diese für nicht definiert ist.

Dabei wird den Schülerinnen und Schülern nicht von vorneherein die Schreibweise

mit den Potenzen von vorgegeben. Erst im Laufe des Beispiels wird sich

diese Schreibweise als vorteilhaft herausstellen.

Taylorpolynom 1.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen: und

;

🡺 🡺

Taylorpolynom 2.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen: und und

; ;

🡺

🡺 🡺 🡺

Es fällt auf, dass sich die Koeffizienten und des Polynoms bei verändert

haben.

Somit scheint der Vorteil der bisherigen Taylorpolynome, dass man nur einen neuen

Koeffizienten berechnen muss, für verloren gegangen zu sein.

An dieser Stelle kann man den Schülerinnen und Schüler mitteilen, dass man mit

einem „Trick“ den oben genannten Vorteil retten kann.

Es gilt:

D.h. man kann die alten Koeffizienten verwenden, falls man quasi als „Variable“ verwendet.

Insbesondere gilt:

Das Taylorpolynom 2.Grades enthält, wie gewohnt, das Taylorpolynom 1.Grades.

Dass dies auch für die höheren Grade gilt wird noch einmal am Beispiel von nachgewiesen und dann allgemein (ohne Beweis) übernommen.

Taylorpolynom 3.Grades:

Entwicklungsmitte:

Bedingungen:

und und und

; ;

🡺 🡺 🡺 🡺

🡺

Umschreiben von :

Bei der Berechnung von wird nur noch der neue Koeffizient berechnet.

Ansatz:

Es gilt: und

Aus folgt 🡺

Mit und folgt aus

Somit lautet die Taylorreihe für :

Diese Taylorreihe konvergiert nur auf dem Intervall und zudem konvergieren die Taylorpolynome sehr langsam. Man müsste daher einen sehr hohen Grad zur näherungsweisen Berechnung von Logarithmen verwenden.

Beispiel: ;

Hier ist schon die dritte Dezimale falsch.

Man müsste mindestens das Polynom vom 28.Grad verwenden, um auf Rechner-genauigkeit (10 Dezimalen) zu erhalten.

Daher ist diese Taylorreihe nicht geeignet, um damit gute Näherungen zu berechnen.

Anschließend zeigt man den Schülerinnen und Schülern, wie man mithilfe einer einfachen Substitution diese Taylorreihe eleganter schreiben kann.

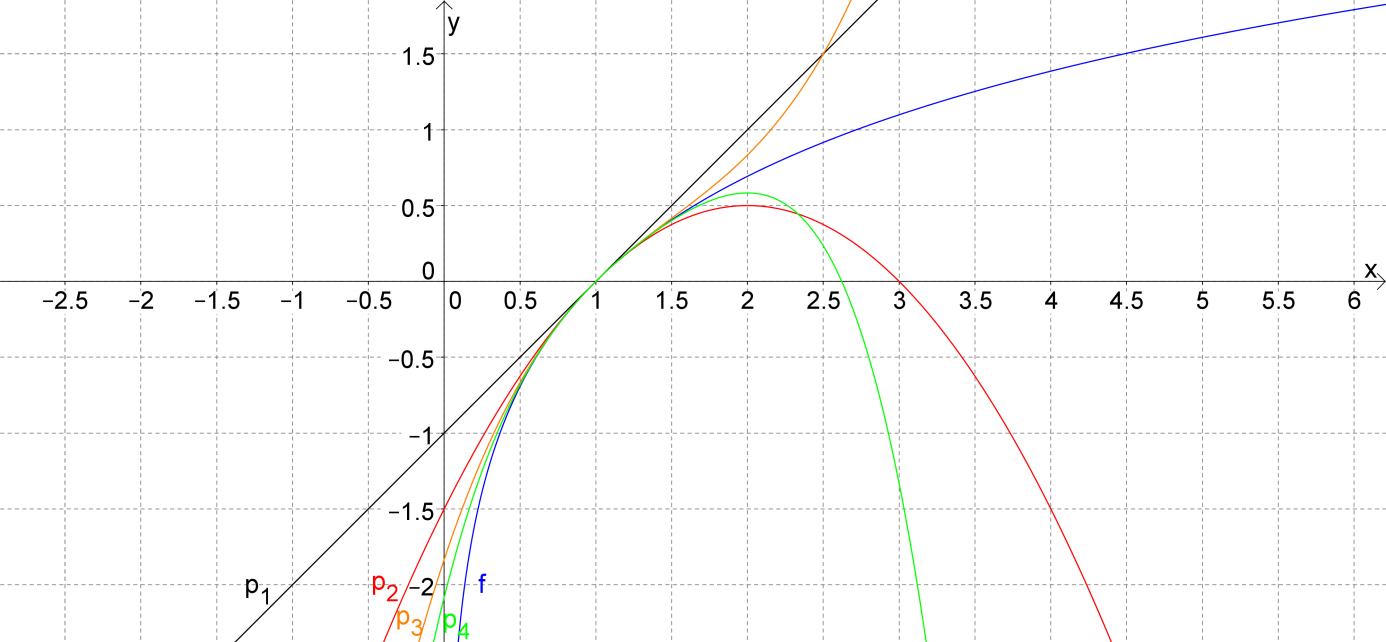
🡺

Will man also berechnen muss man in der Taylorreihe wählen.

Hinweis: Für hätte man auch die Entwicklungsmitte wählen

können.

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



Danach wird noch die Taylorreihe mit einer beliebigen Entwicklungsmitte allgemein definiert.

Die Taylorreihe einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion f mit der Entwicklungsmitte lautet:

**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Eine effektive Taylorreihe zur Berechnung von Logarithmen**

Eine Variation der Einstiegsfrage lautete:“Wie berechnet ein Taschenrechner natürliche Logarithmen?“

Diese Frage konnte durch die Taylorreihe für bzw. noch nicht zufriedenstellend beantwortet werden. Diese Reihe konvergiert nur auf dem Intervall und zudem konvergieren die Taylorpolynome sehr langsam. Man müsste daher einen sehr hohen Grad zur näherungsweisen Berechnung von Logarithmen verwenden.

Im weiteren Verlauf wurde mit den Schülerinnen und Schülern eine geeignetere Taylorreihe erarbeitet, mit der man zum einen auf ganz natürliche Logarithmen berechnen kann und die zudem viel schneller konvergiert. Damit genügt schon die Eingabe eines Taylorpolynoms mit niedrigem Grad zur näherungsweisen Berechnung von Logarithmen.

Entwicklung der Taylorreihe ():

Die Funktion f lässt sich erheblich leichter ableiten, falls man zuvor eines der Logarithmengesetze ( ) anwendet. Dieses Gesetz muss man den Schülerinnen und Schülern mitteilen.

🡺 🡺

🡺 🡺

🡺 🡺

🡺 🡺

🡺 🡺

🡺 🡺

🡺 für gerade k

für ungerade k

für gerade k bzw. für ungerade k

Somit ergibt sich folgende Taylorreihe:

Beispiel:

Aus folgt ;

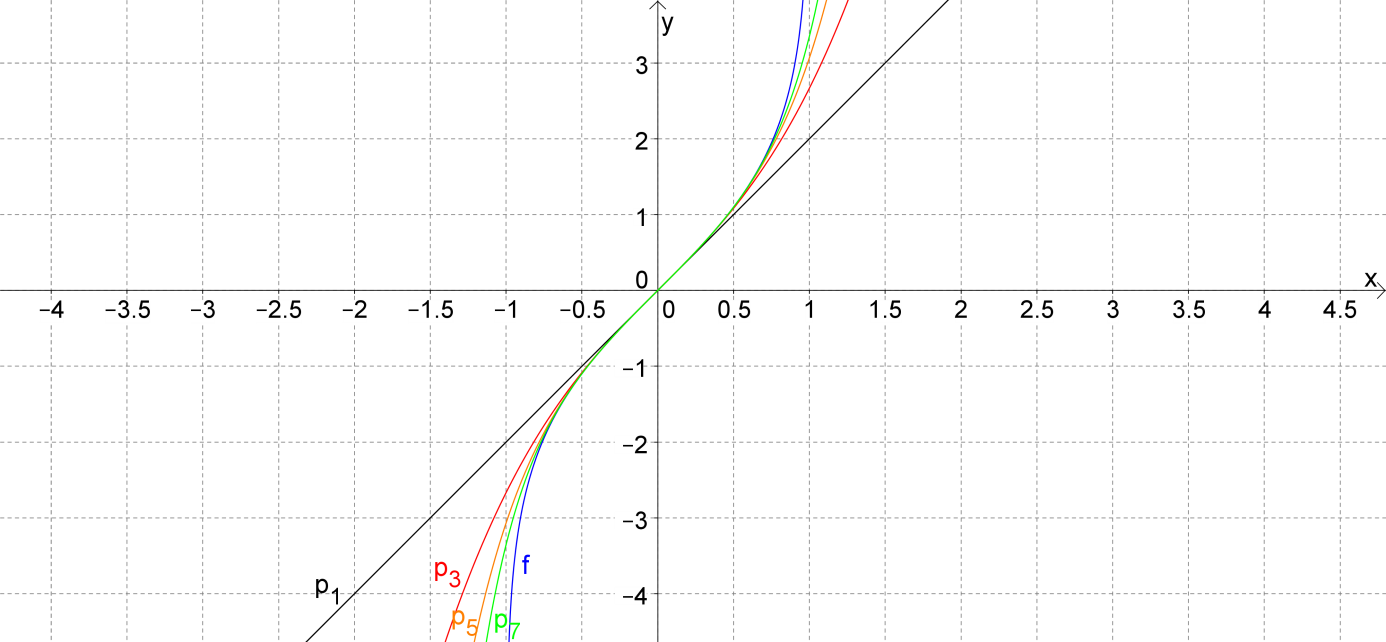
Hier stimmen schon die ersten fünf Dezimalen.

Es genügt das Polynom bis zu verwenden, um auf Rechnergenauigkeit

(10 Dezimalen) zu erhalten.

Daher ist diese Taylorreihe geeignet, um damit gute Näherungen zu berechnen.

Die Abbildung veranschaulicht die Genauigkeit einiger Taylorpolynome.



Will man berechnen, so muss man zunächst das passende x bestimmen.

Aus folgt . Man kann also zu jedem eindeutig x bestimmen, wobei gilt. Die Taylorreihe konvergiert für und die Taylor-polynome nähern sich auch für kleine i gut den Logarithmuswerten an.

Man könnte also den Taschenrechner mit einem Tool programmieren, das zunächst den passenden x- Wert zum eingegebenen y- Wert berechnet. Dieser x- Wert wird dann in ein hinreichend großes Taylorpolynom eingesetzt und damit der Logarithmus näherungsweise berechnet.

Hinweis: Für große Werte von y ist x nahe bei 1 und man müsste i recht groß wählen.

Dies kann man mit einem weiteren Tool, das auf den Logarithmengesetzen beruht, vermeiden. Man dividiert y solange in einer Schleife durch die eulersche Zahl e, bis

das Ergebnis zwischen 1 und e liegt.

Dann gilt:

Man berechnet also den Logarithmus der recht kleinen Zahl mit .

Dann gilt für x:

Dadurch erhält man z.B. für auf Rechnergenauigkeit (10 Dezimalen) die exakten Logarithmuswerte für alle y.

Beispiel:

, d.h. 🡺 (d.h. )

🡺

Einsetzen in liefert:

Analog geht man für y- Werte, die nahe bei Null liegen vor. Jetzt multipliziert man solange mit e, bis das Ergebnis zwischen 1 und e liegt.

Beispiel:

, d.h. 🡺 (d.h. )

🡺

Einsetzen in liefert:

**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Beispiele für Konvergenzradien von Taylorreihen**

Den Konvergenzradius von Potenzreihen und speziell von Taylorreihen kann man entweder mithilfe des Quotientenkriteriums oder mithilfe des Wurzelkriteriums (Formel von Cauchy- Hadamard) bestimmen.

Dabei ist das Wurzelkriterium das mathematisch schärfere Kriterium. Das heißt, es gibt Beispiele für Potenzreihen, deren Konvergenzradius mit dem Wurzelkriterium bestimmt werden kann, obwohl das Quotientenkriterium nicht zum Ziel führt.

Mögliche Definition des Konvergenzradius:

Gegeben ist die Potenzreihe

Falls es eine Zahl gibt, so dass für die Potenzreihe konvergiert und für die Potenzreihe divergiert, dann heißt r der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Sonderfälle:

1) Wenn die Potenzreihe nur für konvergiert, dann gilt .

2) Wenn die Potenzreihe für alle konvergiert, dann gilt .

Die Potenzreihe konvergiert auf dem offenen Intervall .

Ob die Reihe auch an einem der Ränder oder an beiden Rändern des Intervalls konvergiert, kann weder mit dem Wurzelkriterium noch mit dem Quotientenkriterium entschieden werden, sondern muss getrennt betrachtet werden.

**Quotientenkriterium** zur Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe:

a) Falls existiert, dann gilt .

b) Falls für gilt , dann gilt

Hinweis: Falls weder a) noch b) eintreten, dann kann man mit dem Quotienten-

kriterium den Konvergenzradius der Potenzreihe nicht bestimmen.

**Wurzelkriterium** zur Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe:

a) Falls existiert, dann gilt für:

a1) :

a2) :

b) Falls für gilt , dann gilt

Da die Schülerinnen und Schüler ohne Hilfsmittel (Taschenrechner usw.) das Verhalten von für in der Regel nicht abschätzen können, macht es auch wenig Sinn das Wurzelkriterium im Unterricht zu behandeln.

Das Verhalten von für können die Schülerinnen und Schüler in der Regel auch ohne Hilfsmittel recht gut abschätzen. Daher ist es gut möglich den Schülerinnen und Schülern das Quotientenkriterium mitzuteilen und damit einige Beispiele für Konvergenzradien zu bestimmen.

Dabei ist natürlich nicht an einen Beweis des Kriteriums gedacht, der deutlich über das Niveau des Vertiefungskurses hinausgehen würde.

Beispiel 1: ;

🡺 🡺

Somit konvergiert diese Taylorreihe nur auf dem Intervall .

Beispiel 2: ;

, daher gilt

Somit konvergiert diese Taylorreihe nur auf ganz IR.

Beispiel 3: ;

🡺 🡺

Somit konvergiert diese Taylorreihe nur auf dem Intervall .

**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Aufgaben zu Taylorreihen**

**AUFGABE 1** Bestimme die Taylorreihe für folgende Funktionen um die

Entwicklungsmitte . Bestimme auch den Konvergenzradius r der Reihe.

a) b) c) d)

**AUFGABE 2** Bestimme jeweils das Taylorpolynom p5 (d.h. vom Grad 5) um die Entwicklungsmitte .

Berechne jeweils die prozentuale Abweichung von p5(1) von f(1).

a) b) c) d)

(Definition: “Sinus hyperbolicus” )

Hinweis: 🡺

🡺

**AUFGABE 3**  Bestimme die Taylorreihe für folgende Funktionen um die Entwicklungsmitte .

a) f(x) = ; b) g(x) = ;

(Definition: “Cosinus hyperbolicus” )

**Vertiefungskurs Mathematik 12**

**Lösungen: Aufgaben zu Taylorreihen**

**AUFGABE 1**

a) ; ; …

Konvergenzradius: Quotientenkriterium

🡺 Es gibt keinen Grenzwert

Also gilt:

b) ; ;

;

für ungerade k 🡺 für ungerade k

; ; ;

; ; ; …

Konvergenzradius: Quotientenkriterium

🡺 Es gibt keinen Grenzwert

Also gilt:

c) ; ; ;

… 🡺

Konvergenzradius: Quotientenkriterium

🡺

Also gilt:

d) ; ; ;

… 🡺

Konvergenzradius: Quotientenkriterium

🡺

Also gilt:

**AUFGABE 2** Bestimme jeweils das Taylorpolynom p5 (d.h. vom Grad 5) um die Entwicklungsmitte x0 = 0.

Berechne jeweils die prozentuale Abweichung von p5(1) von f(1).

a) ; ;

; ;

; ; ; ;

🡺

; 🡺

b) ; ;

;

; ; ; ;

🡺

🡺

c) ; ;

;

; ; ; ;

🡺

🡺

d) ;

; ;

; ; ; ;

🡺

🡺

**AUFGABE 3**

a) ;

;

🡺

b) ;

; ;

für gerade k (d.h k = 2m) ; für ungerade k