ZPG Vertiefungskurs Mathematik

Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „Linienintegrale“

Der vorgestellte Unterrichtsgang „Linienintegrale“ wurde in der Klassenstufe 12 in

vier Doppelstunden unterrichtet. Die Anregung Linienintegrale zu behandeln kam von

einem Schüler, der im Zuge der Unterrichtseinheit „Integrationstechniken“ im Unter-

richt die Frage stellte, was denn eigentlich Linienintegrale wären. Er war einen Tag

pro Woche zum Frühstudium (Jura) an der Universität und hatte dort den Begriff auf-

geschnappt.

In der Fachliteratur werden Linienintegrale auch Kurvenintegrale oder Wegintegrale

genannt. Man unterscheidet Linienintegrale 1.Art und Linienintegrale 2.Art.

Bei Linienintegralen 1.Art wird über ein Skalarfeld integriert, bei Linienintegralen 2.Art

über ein Vektorfeld. In dieser Unterrichtseinheit wurden nur Linienintegrale über zwei-

dimensionale Skalarfelder f mit betrachtet.

Die Kurve längs der integriert wird, heißt auch Integrationsweg und kurz Weg ().

Der Ausdruck heißt Wegelement oder Längenelement. Im Spezial-

fall ergibt das Linienintegral die Länge L des Weges entlang der Kurve.

Es gibt zwei prinzipielle Möglichkeiten Linienintegrale über zu berechnen.

Man ersetzt im Funktionsterm die Variable y durch den Term und erhält

somit das Integral . Man kann aber auch die beiden

Variablen x und y parametrisieren und erhält z.B. mit und und dem Weg-

element das Integral .

In der ersten Doppelstunde wurden zunächst einige Beispiele für Funktionen mit zwei

Variablen und deren Veranschaulichung im dreidimensionalen Raum betrachtet.

Dazu gehörte auch eine „modifizierte“ Ebenengleichung (), die die

Schülerinnen und Schüler aus der analytischen Geometrie kennen. Danach wurde

den Schülerinnen und Schülern mithilfe eines Papierstreifens ein Linienintegral ver-

anschaulicht. An diesem Streifen war an einer Seite mit einer Schere ein Profil ge-

schnitten worden. Der Streifen kann als Kurve gebogen werden und stellt somit einen

Schnitt durch den Raum unter dem Graphen von f mit dar.

Im Zusammenhang mit den Linienintegralen (Spezialfall ) sollte man

natürlich auch die Länge eines Kurvenstückes thematisieren, um die Rolle des

Wegelements besser verstehen zu können. Zudem lernen die Schülerinnen und

Schüler dadurch, quasi nebenbei, wie man die Länge eines Kurvenstückes berech-

net. Als Einstieg in die Berechnung der Länge eines Kurvenstückes sollten die

Schülerinnen und Schüler zunächst in Partnerarbeit die Länge eines Parabelbogens

näherungsweise bestimmen (siehe auch Arbeitsblatt Datei 11). Dabei näherten alle

Tandems den Kurvenverlauf mithilfe mehrere Sekanten an und berechneten die

Summe deren Länge.

Anschließend wurde im Plenum die Formel zur der Länge L eines Kurvenstückes

hergeleitet (). Dann wurde am Ende der Doppelstunde da-

mit begonnen im konkreten Beispiel die Länge des Parabelbogens zu berechnen.

Das auftretende Integral können die Schülerinnen und Schüler jedoch

auch nach Behandlung der Integrationstechniken nicht alleine berechnen.

In der zweiten Doppelstunde wurde die Berechnung des Integrals fort-

geführt (siehe auch Datei 04). Um dieses Integral mittels Substitution zu lösen, be-

nötigt man die hyperbolischen Funktionen. Somit besteht hier eine gute Gelegenheit

den Schülerinnen und Schülern die hyperbolischen Funktionen vorzustellen.

Im Plenum wurden die Funktionen und cos definiert und deren Ableit-

ungen von den Schülerinnen und Schülern eigenständig berechnet. Anschließend

wurde noch der wichtige Zusammenhang thematisiert.

Wegen der späteren Anpassung der Integralgrenzen wurden auch noch die Umkehr-

funktionen und kurz angesprochen.

Am Ende der Doppelstunde wurde das Linienintegral definiert und ein erstes Beispiel

mit vier verschiedenen Wegen im Plenum vorgestellt und das Integral für den Weg 1

berechnet (siehe auch Datei 05).

Damit den Schülerinnen und Schüler die Abhängigkeit von der Wahl des Weges be-

wusst wird, sollte man für eine Funktion f verschiedene Wege zwischen zwei festen

Punkten in der x-y- Ebene wählen.

In der dritten Doppelstunde wurden die Integrale längs der Wege 2, 3 und 4 berech-

net. Dabei wurde auch die Möglichkeit der Parametrisierung des Weges eingeführt

(siehe auch Datei 05).

In der vierten Doppelstunde bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben

eines Aufgabenblattes zu Linienintegralen (Datei 11). Die Lösungen dieser Aufgaben

(Datei 21) lagen im Klassenraum zur Selbstkontrolle aus.