**ZPG Vertiefungskurs Mathematik**

**Mögliche Stundenverteilung zum Thema Linienintegrale (8 h)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nr | Inhalte | Begleitmaterial |
| 1/2 | Einstieg in das ThemaBeispiele für Funktionen mit zwei Variablen und deren Darstellung als Fläche im RaumVeranschaulichung eines Linienintegrals mithilfe eines PapierstreifensSonderfall: Länge eines Parabelbogens ()(SuS sollen eigenständig näherungsweise die Länge berechnen)Präsentation der Ergebnisse im PlenumHerleitung der Formel zur Berechnung der Länge L eines Kurvenstückes im PlenumBeginn der Berechnung der Länge des Parabelbogens im Plenum:  | Aufgabenblatt: Länge eines Parabelbogens |
| 3/4 | Fortsetzung der Berechnung der Länge des ParabelbogensDazu Einschub: Definition und Eigenschaften der Hyperbolischen Funktionen und Ableitungen und Definition des Linienintegrals in der Normal-darstellung:Beispiel: ; Weg 1: Strecke  |  |
| Nr | Inhalte | Begleitmaterial |
| 5/6 | Fortführung des Beispiels Weg 2:Viertelkreis mit Mittelpunkt O zwischen und Definition des Linienintegrals in Parameterform:Diskussion über weitere alternative WegeWelcher Weg führt zu einem kleineren Wert?Weg 3 entlang der Koordinatenachsen liefert den Wert 0.Weg 4: Viertelkreis mit Mittelpunkt M zwischen und  |  |
| 7/8 | Übungsstunde zur Kurvenlänge und zu Linien- integralen (Aufgaben vom Übungsblatt)  | Übungsblatt:Aufgaben zu Linien-integralen |

ZPG Vertiefungskurs Mathematik

Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „Linienintegrale“

Der vorgestellte Unterrichtsgang „Linienintegrale“ wurde in der Klassenstufe 12 in

vier Doppelstunden unterrichtet. Die Anregung Linienintegrale zu behandeln kam von

einem Schüler, der im Zuge der Unterrichtseinheit „Integrationstechniken“ im Unter-

richt die Frage stellte, was denn eigentlich Linienintegrale wären. Er war einen Tag

pro Woche zum Frühstudium (Jura) an der Universität und hatte dort den Begriff auf-

geschnappt.

In der Fachliteratur werden Linienintegrale auch Kurvenintegrale oder Wegintegrale

genannt. Man unterscheidet Linienintegrale 1.Art und Linienintegrale 2.Art.

Bei Linienintegralen 1.Art wird über ein Skalarfeld integriert, bei Linienintegralen 2.Art

über ein Vektorfeld. In dieser Unterrichtseinheit wurden nur Linienintegrale über zwei-

dimensionale Skalarfelder f mit betrachtet.

Die Kurve längs der integriert wird, heißt auch Integrationsweg und kurz Weg ().

Der Ausdruck heißt Wegelement oder Längenelement. Im Spezial-

fall ergibt das Linienintegral die Länge L des Weges entlang der Kurve.

Es gibt zwei prinzipielle Möglichkeiten Linienintegrale über zu berechnen.

Man ersetzt im Funktionsterm die Variable y durch den Term und erhält

somit das Integral . Man kann aber auch die beiden

Variablen x und y parametrisieren und erhält z.B. mit und und dem Weg-

element das Integral .

In der ersten Doppelstunde wurden zunächst einige Beispiele für Funktionen mit zwei

Variablen und deren Veranschaulichung im dreidimensionalen Raum betrachtet.

Dazu gehörte auch eine „modifizierte“ Ebenengleichung (), die die

Schülerinnen und Schüler aus der analytischen Geometrie kennen. Danach wurde

den Schülerinnen und Schülern mithilfe eines Papierstreifens ein Linienintegral ver-

anschaulicht. An diesem Streifen war an einer Seite mit einer Schere ein Profil ge-

schnitten worden. Der Streifen kann als Kurve gebogen werden und stellt somit einen

Schnitt durch den Raum unter dem Graphen von f mit dar.

Im Zusammenhang mit den Linienintegralen (Spezialfall ) sollte man

natürlich auch die Länge eines Kurvenstückes thematisieren, um die Rolle des

Wegelements besser verstehen zu können. Zudem lernen die Schülerinnen und

Schüler dadurch, quasi nebenbei, wie man die Länge eines Kurvenstückes berech-

net. Als Einstieg in die Berechnung der Länge eines Kurvenstückes sollten die

Schülerinnen und Schüler zunächst in Partnerarbeit die Länge eines Parabelbogens

näherungsweise bestimmen (siehe auch Arbeitsblatt Datei 11). Dabei näherten alle

Tandems den Kurvenverlauf mithilfe mehrere Sekanten an und berechneten die

Summe deren Länge.

Anschließend wurde im Plenum die Formel zur der Länge L eines Kurvenstückes

hergeleitet (). Dann wurde am Ende der Doppelstunde da-

mit begonnen im konkreten Beispiel die Länge des Parabelbogens zu berechnen.

Das auftretende Integral können die Schülerinnen und Schüler jedoch

auch nach Behandlung der Integrationstechniken nicht alleine berechnen.

In der zweiten Doppelstunde wurde die Berechnung des Integrals fort-

geführt (siehe auch Datei 04). Um dieses Integral mittels Substitution zu lösen, be-

nötigt man die hyperbolischen Funktionen. Somit besteht hier eine gute Gelegenheit

den Schülerinnen und Schülern die hyperbolischen Funktionen vorzustellen.

Im Plenum wurden die Funktionen und cos definiert und deren Ableit-

ungen von den Schülerinnen und Schülern eigenständig berechnet. Anschließend

wurde noch der wichtige Zusammenhang thematisiert.

Wegen der späteren Anpassung der Integralgrenzen wurden auch noch die Umkehr-

funktionen und kurz angesprochen.

Am Ende der Doppelstunde wurde das Linienintegral definiert und ein erstes Beispiel

mit vier verschiedenen Wegen im Plenum vorgestellt und das Integral für den Weg 1

berechnet (siehe auch Datei 05).

Damit den Schülerinnen und Schüler die Abhängigkeit von der Wahl des Weges be-

wusst wird, sollte man für eine Funktion f verschiedene Wege zwischen zwei festen

Punkten in der x-y- Ebene wählen.

In der dritten Doppelstunde wurden die Integrale längs der Wege 2, 3 und 4 berech-

net. Dabei wurde auch die Möglichkeit der Parametrisierung des Weges eingeführt

(siehe auch Datei 05).

In der vierten Doppelstunde bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben

eines Aufgabenblattes zu Linienintegralen (Datei 11). Die Lösungen dieser Aufgaben

(Datei 21) lagen im Klassenraum zur Selbstkontrolle aus.

**Mathematik Vertiefungskurs 12**

**Exakte Berechnung des Parabelbogens**

Es gilt: 🡺

Länge des Parabelbogens:

Um dieses Integral zu berechnen kann man für die Substitution die hyperbolischen Funktionen verwenden.

Definition:

a) Die Funktion f mit nennt man auch „Sinus hyperbolicus“.

 Schreibweise:

b) Die Funktion g mit g nennt man auch „Cosinus hyperbolicus“.

 Schreibweise:

Eigenschaften und Graphen der hyperbolischen Funktionen



Es gilt:

 🡺

 🡺

Zusammenhang:

🡺

🡺

Die Umkehrfunktionen lauten bzw. .

Substitution: 🡺 🡺

Grenzen: und

Partielle Integration: ; 🡺 ;

Es gilt:

**Mathematik Vertiefungskurs 12**

**Beispiele für Linienintegrale**

In diesem Beispiel sollen mehrere Linienintegrale bezüglich der gleichen Funktion f entlang vier verschiedener Wege zwischen den Punkten und

berechnet werden. Dabei wird auch die Parameterdarstellung beim Weg 2 eingeführt und dann beim Weg 4 verwendet.



Weg 1: mit 🡺

Linienintegral:

Weg 2: ; mit (Parameterdarstellung)

🡺 und

Linienintegral:

Alternative Lösung (ohne Parameterdarstellung) für den Weg 2

 mit 🡺

Gibt es Wege, für die das Linienintegral bzgl. f einen noch kleineren Wert annimmt als für den Weg 1?

Weg 3: Entlang der Koordinatenachsen

Da auf den Koordinatenachsen bzw. gilt, ist dort der Funktionswert von f immer Null.

Somit gilt auch

Gibt es Wege, die nicht auf den Koordinatenachsen verlaufen, für die das Linienintegral bzgl. f einen noch kleineren Wert annimmt als für den Weg 1?

Weg 4: Viertelkreis mit Mittelpunkt zwischen P und Q.

 ; mit (Parameterdarstellung)

🡺 und

Linienintegral:

Dass der Weg 4 einen kleineren Wert liefert als der Weg 2 war auch zu erwarten, da die Funktionswerte von f umso kleiner werden, umso näher man dem Ursprung kommt. Wenn bei gleicher Weglänge die Funktionswerte kleiner sind, dann liefert auch das Linienintegral einen kleineren Wert.

**Mathematik Vertiefungskurs 12**

**Länge eines Parabelbogens**

**Aufgabenstellung:**

Gegeben ist der Graph (Parabel) der Funktion f mit . Die Länge des Kurvenstückes vom Punkt bis zum Punkt soll näherungsweise berechnet werden.

Versucht diese Länge möglichst genau zu bestimmen.

**Hilfsmittel:** WTR

**Zeit:** 20 Minuten



**Vertiefungskurs Mathematik Klasse 12**

**Aufgaben zu Linienintegralen**

**AUFGABE 1** Berechne jeweils die Länge des Kurvenstückes zwischen den Punkten

A und B auf dem Graphen der Funktion:

a) ; ;

b) ; ;

c) ; ;

**AUFGABE 2** Gegeben sind die Funktion f mit und die Punkte

und .

a) Berechne die Länge des Kurvenstückes auf dem Graphen von f zwischen den

 Punkten A und B.

b) Das Kurvenstück auf dem Graphen von f zwischen den Punkten B und C hat die

 Länge 50.

 Bestimme die Koordinaten des Punktes C.

**AUFGABE 3** Gegeben ist die Funktion f mit mit .

Berechne jeweils die Linienintegrale zwischen den Punkten und

längs der Wege 1 bis 4.



**Hinweis:**  🡺

**Vertiefungskurs Mathematik Klasse 12**

**Lösungen: Aufgaben zu Linienintegralen**

**AUFGABE 1**

a) 🡺

Länge L des Kurvenstückes:

Substitution: 🡺 🡺

Grenzen: und

b) 🡺

Länge L des Kurvenstückes:

c) 🡺

Länge L des Kurvenstückes:

Substitution: 🡺

Partialbruchzerlegung:

 🡺

Grenzen: und

Anwenden von Logarithmengesetzen und Rationalmachen der Nenner liefert:

**AUFGABE 2**

a) 🡺

Länge L des Kurvenstückes:

Substitution: 🡺

 🡺

Grenzen: und

b)

Aus a) folgt:

🡺 🡺

 🡺

🡺

🡺

**AUFGABE 3**

Weg 1: mit 🡺

Linienintegral:

Substitution: 🡺 🡺

Grenzen: und

Weg 2: ; mit (Parameterdarstellung)

🡺 und

Linienintegral:

Weg 3: Der Weg 3 besteht aus drei Teilstücken, wobei die Teilstücke 1 und 3 aus

 Symmetriegründen den gleichen Wert liefern.

Teilstück 1: Strecke von Q zum Punkt

Teilstück 2: Viertelkreis vom Punkt zum Punkt

Teilstück 3: Strecke von zum Punkt P

a) Teilstück 3: ; 🡺

Linienintegral:

b) Teilstück 2: ; mit (Parameterdarstellung)

🡺 und

Linienintegral:

Weg 4: Der Weg 4 besteht aus drei Teilstücken, wobei die Teilstücke 1 und 3 aus

 Symmetriegründen den gleichen Wert liefern.

Teilstück 1: Strecke von Q zum Punkt

Teilstück 2: Viertelkreis vom Punkt zum Punkt

Teilstück 3: Strecke von zum Punkt P

a) Teilstück 3: ; 🡺

Linienintegral:

b) Teilstück 2: ; mit (Parameterdarstellung)

🡺 und

Linienintegral: