**Formel vom totalen Erwartungswert – Erarbeitung – Lösungen**

*Vorüberlegung:*

und

und

**Satz (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit)  
Beweis:**

1. Es gilt .  
   *1. Möglichkeit:* Veranschaulichung im Mengendiagramm

A4

A1

B

A3

A5

A2

*2. Möglichkeit:* formaler Beweis  
Wenn ist, dann existiert ein mit und . Denn , d.h. die überdecken die ganze Ergebnismenge. Somit ist .  
Wenn umgekehrt für ein mit und ist, so gilt insbesondere

1. Die sind paarweise disjunkt, da die paarweise disjunkt sind.  
   [Formal: Angenommen es existiert ein , dann gilt insbesondere im Widerspruch zur Disjunktheit der .]
2. Es gilt . Denn nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist . Diese Gleichung umgeformt ergibt die Behauptung.
3. Wegen (1) und (2) ist .
4. Wegen (3) ist .

*Fortsetzung der Vorüberlegung:* Im oben betrachteten Zufallsexperiment gilt:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | 0 | 1 | 2 | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |

**Satz (Formel vom totalen Erwartungswert)  
Beweis:** Wenn die Zufallsgröße die Werte annimmt, so ist nach der Definition des Erwartungswerts .

Nun benutzt man die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit für das Ereignis (für ). Dann folgt

Dies eingesetzt, ergibt sich

*Begründung: Die Summe wird mit multipliziert. Nach dem Distributivgesetz erhält man ausmultipliziert die Summe, bei der jeder Summand mit multipliziert wird: .   
[Ohne Summenzeichen geschrieben:   
 ]*

*Begründung: Bei einer Summe kann die Reihenfolge der Summanden vertauscht werden (Kommutativgesetz). [Ohne Summenzeichen geschrieben:*

*Begründung: Bei der Summe wird ausgeklammert. Denn dieser Faktor kommt in jedem Summanden vor und hängt nicht von ab. Nach dem Distributivgesetz erhält man .*

*[Ohne Summenzeichen geschrieben:*

*]*

*(nach der Definition des bedingten Erwartungswerts)*

**Formel vom totalen Erwartungswert – Aufgaben – Lösungen**

1. Betrachtet wird das Ereignis : „Der Käufer wählt die Garantieverlängerung).
2. Die Aufteilung erfolgt in die Ereignisse K (Kühlschränke), H (Herde), G (Geschirrspülmaschinen) und S (Sonstige). Der Tabelle entnimmt man:  
    und

.  
Damit ergibt sich mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit

1. mithilfe eines Baumdiagramms:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Nach der ersten Pfadregel (Produktregel) multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades und erhält für . Nach der zweiten Pfadregel (Summenregel) addiert man die zum Ereignis gehörenden Wahrscheinlichkeiten und erhält
2. a) ist der bedingte Erwartungswert für das Produkt der Augenzahlen unter der Bedingung, dass der erste Würfel eine „1“ zeigt. Dieses ist gleich der Augenzahl des zweiten Würfels. Damit ist der Erwartungswert für die Augenzahl beim einmaligen Würfeln, also .
3. Für zum Beispiel ist , wenn und sonst. Denn unter der Bedingung, dass der erste Würfel eine „3“ zeigt, können nur Vielfache von 3 als Produkt der Augenzahlen auftreten.   
   Für ist allgemein die bedingte Wahrscheinlichkeit , wenn und sonst.  
   Somit ist
4. Die Ereignisse sind paarweise disjunkt, haben alle positive Wahrscheinlichkeit und . Damit kann die Formel vom totalen Erwartungswert angewendet werden und es ergibt sich  
    .  
   Beim Werfen zweier Würfel kann man auf lange Sicht im Durchschnitt pro Wurf eine Augensumme von erwarten.  
   [Dieses Resultat erhält man auch direkt aus der Multiplikationsregel für Erwartungswerte. Diese besagt, dass für stochastisch *unabhängige* Zufallsgrößen und gilt: . Offensichtlich sind die Augensummen der beiden Würfel unabhängig.]