**Vertiefungskurs Mathematik**

**Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 28.09.2018**

**AUFGABE 1**

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

δ

β

α

γ

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | A ⇔ B | A ∧ B | ¬ A | ¬ B | ¬ A ∧ ¬ B | α ∨ β | γ ⇔ δ |
| f | f | w | f | w | w | w | w | w |
| f | w | f | f | w | f | f | f | w |
| w | f | f | f | f | w | f | f | w |
| w | w | w | w | f | f | f | w | w |

 Somit liegt eine Tautologie vor und die Äquivalenz ist bewiesen.

b) Aus folgt, dass A nicht auf Platz 1 liegen kann.

 Annahme: C liegt auf Platz 1.

 Mit folgt dann sofort, dass B nicht auf Platz 2 liegen kann 🡺 B ist Dritter.

 Aus folgt dann sofort, dass C nicht auf Platz 1 liegen kann.

 Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Demnach ist die Annahme falsch und

 damit muss, wegen B auf Platz 1 liegen.

 Dann folgt sofort mit , dass A Zweiter ist (da B ja nicht Zweiter sein kann).

 Somit bleibt für C nur noch der Platz 3 übrig.

 Ergebnis:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.Platz | 2.Platz  | 3.Platz  |
| B | A | C |

**AUFGABE 2**

a1) Beispiel: mit ist eine Nullfolge und mit ist divergent

 🡺 die Folge mit ist divergent

a2) Beispiel: mit ist eine Nullfolge und mit ist divergent

 🡺 die Folge mit ist eine Nullfolge, also konvergent

a3) Beispiel: mit ist divergent und mit ist divergent

 🡺 die Folge mit ist divergent

a4) Beispiel: mit ist divergent

 mit ist divergent

🡺 die Folge mit ist eine Nullfolge und damit konvergent

b) Mit einem der Grenzwertsätzen folgt

c) 1) Induktionsanfang: ;

 Somit ist die Behauptung für nachgewiesen.

 2) Induktionsschritt: Für ein mit gilt:

 Zu zeigen ist:

 Sei , dann folgt mit sofort

 Demnach sind und zwei konvergente Folgen und somit die Voraussetzungen von Teilaufgabe b) erfüllt.

 Also gilt:

 3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung für alle .

**AUFGABE 3**

a) Weg 1:

 p ist eine quadratische Funktion und daher der Graph eine Parabel 2.Grades.

 Da der Koeffizient vor dem quadratischen Glied positiv ist, ist die Parabel nach

 oben geöffnet, d.h. der Scheitel ist der tiefste Punkt der Parabel.

 Bestimmung der Scheitelform von p:

 Der Scheitel lautet und somit gilt für alle :

 Weg 2: (Scheitelbestimmung mithilfe der Nullstellen von p\*)

 Der x- Wert des Scheitels S liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen der quadratischen Funktion p\* mit .(um 7 nach unten verschoben)

 Nullstellen von p\*: 🡺 und

 Somit gilt 🡺 🡺

 Weg 3: (Minimum mithilfe der Differentialrechnung)

 Es gilt: 🡺 🡺

 Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: 🡺

 🡺 (einziger Kandidat für eine Extremstelle)

 Überprüfung mit der 2.Ableitung: 🡺

 Also liegt bei ein Minimum von p vor. Es gilt

 Demnach gilt für alle :

b)

 Aus Teilaufgabe a) folgt, dass die Wurzel für alle definiert ist.

 Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung liefert:

 Umformen liefert: bzw. 🡺 und

 Da das Quadrieren einer Gleichung keine Äquivalenzumformung ist, muss man

 jeweils die Probe in der Ausgangsgleichung vornehmen.

 Probe für :

 🡺 wahre Aussage

 Probe für :

 🡺 falsche Aussage

 Lösungsmenge

 Aus Teilaufgabe a) folgt, dass die Wurzel für alle definiert ist.

 Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung liefert:

 Umformen liefert: bzw. 🡺 und

 Da das Quadrieren einer Gleichung keine Äquivalenzumformung ist, muss man

 jeweils die Probe in der Ausgangsgleichung vornehmen.

 Probe für :

 🡺 falsche Aussage

 Probe für :

 🡺 wahre Aussage

 Lösungsmenge

c) Die Ungleichung besitzt als Grenzfall die Gleichung

 aus der Teilaufgabe b).

 Diese Gleichung hat als einfache Lösung , d.h. die Funktion f mit

 hat die einfache Nullstelle .

 Somit wechselt f das Vorzeichen an der Stelle .

 Eine Punktprobe für z.B. liefert:

 Demnach gilt für alle

 Somit folgt: für alle

 Alternativer Lösungsweg:

 Da die linke Seite der Ungleichung nicht negativ ist, muss x so gewählt werden,

 dass auch die rechte Seite der Ungleichung nicht negativ ist.

 Somit muss gelten: 🡺

 Da für beide Seiten nicht negativ sind, ist das Quadrieren der Ungleichung

 in diesem Fall eine Äquivalenzumformung.

 Quadrieren auf beiden Seiten der Ungleichung liefert:

 Mit folgt:

 Also gilt: für alle

**AUFGABE 4**

a) Aus und folgt bzw.

 Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung , so folgt:

 bzw.

 Dividieren der Ungleichung auf beiden Seiten durch liefert:

 Damit ist der linke Teil der Ungleichungskette bewiesen.

 Aus und folgt bzw.

 Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung , so folgt:

 bzw.

 Dividieren der Ungleichung auf beiden Seiten durch liefert:

 Damit ist der rechte Teil der Ungleichungskette bewiesen.

b) 1) Induktionsanfang: ; ;

 wurde bereits in Teilaufgabe a) nachgewiesen.

 2) Induktionsschritt: Für ein mit gilt:

 Aus und folgt

 Zu zeigen:

 Aus und folgt

 Sei und

 Es gilt offensichtlich

 Mit folgt:

 Aus folgt mit Teilaufgabe a)

 Mit folgt:

 Somit gilt: :

 Einsetzen von und liefert:

 3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung für alle .