**Vertiefungskurs Mathematik**

**Ausführliche Lösungen zur Zertifikatsklausur vom 27.09.2019**

**AUFGABE 1**

a) Lösung mithilfe einer Wahrheitswerttabelle

β

α

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | A ⇒ B | ¬ A | ¬ A ∨ B | α ⇔ β |
| f | f | w | w | w | w |
| f | w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | f | w |
| w | w | w | f | w | w |

 Somit liegt eine Tautologie vor und die Äquivalenz ist bewiesen.

b) Aus b2) und b4) folgt, dass A nicht James heißen kann.

 Mit b1) folgt dann sofort, dass **A Alexander** heißen muss.

 Daher heißt B nicht Alexander und mit b3) folgt, dass **C Pjotr** heißt.

 Demnach heißt B auch nicht Pjotr. Daher folgt mit b5), dass B auch nicht Francois

 heißt. Also bleibt für **B** nur noch der Name **James** übrig.

 Somit bleibt für **D** nur noch der Name **Francois** übrig.

 Ergebnis:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D |
| Alexander | James | Pjotr | Francois |

**AUFGABE 2**

a1) Für jedes gibt es ein , so dass für alle gilt:

a2) Voraussetzung: Für jedes gibt es ein , so dass für alle gilt:

 Behauptung: Für alle gilt

 (s ist eine untere Schranke; S ist eine obere Schranke)

 Beweis: Da die Folge konvergent ist, gilt für jedes und alle :

 Somit folgt z.B. für sofort

 Das heißt, alle mit liegen im Intervall .

 Somit liegen unendliche viele Folgeglieder im „ε - Schlauch“ um a.

 Sei und

 sei

 Hinweis: Auf einer endlichen Zahlenmenge wird das Minimum und das Maximum

 stets angenommen.

 Somit gilt für alle mit :

 Da und gilt, folgt auch für alle mit :

 Somit gilt für alle :

 Hinweis: Dies ist eine Definition der Beschränktheit von .

 Die Abbildung veranschaulicht die Situation an einem Beispiel:



a3) Der Kehrsatz lautet:

 Ist eine Folge beschränkt, dann ist sie auch konvergent.

 Der Kehrsatz ist eine falsche Aussage, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

 Es gilt , demnach ist beschränkt. Aber besitzt offensichtlich keinen Grenzwert.

 Alternatives Gegenbeispiel:

b) Den Wurzelterm kann man zunächst, wegen der Differenz, nicht vereinfachen.

 Mithilfe der 3.binomischen Formel kann man den Term durch Erweitern umformen.

 Kürzt man diesen Bruch jetzt mit n, dann folgt:

 Für gilt .

 Damit folgt mit den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen:

 sowohl

 als auch

**AUFGABE 3**

a)1) Induktionsanfang:

 Somit ist die Behauptung für nachgewiesen.

 2) Induktionsschritt: Für ein mit gilt:

 Zu zeigen ist:

 wegen

 Die 3.binomische Formel und die Potenzgesetze liefern:

 3) Induktionsschluss: Aus 1) und 2) folgt die Behauptung für alle .

b) Sei 🡺

 Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der Faktoren

 Null ist.

 Somit hat genau die beiden Nullstellen und .

 Für gilt:

Auch dieses Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Die beiden ersten Klammern können den Wert Null annehmen.

🡺 und sind Nullstellen von .

Die restlichen Klammern haben alle die Form:

 für

Da gilt (Quadrate sind nie negativ), folgt

für alle .

Daher nehmen alle Klammern, außer den beiden ersten Klammern, nie den Wert

Null an.

Somit haben alle nur die Nullstellen und .

**AUFGABE 4**

a) Um die Ungleichung umzuformen, muss man mit dem Nenner des Bruches

 multiplizieren. Somit muss man sich zuerst Klarheit über das Vorzeichen des

 Nenners für verschiedene Werte von x machen.

 Die (einfachen) Nullstellen des Nenners lauten: ;

 Die Abbildung zeigt eine Gebietseinteilung für das Vorzeichen des Nenners:



 Fall 1:

 Multiplizieren mit dem negativen Nenner liefert:

 🡺 🡺

 Fall 2: oder

 Multiplizieren mit dem positiven Nenner liefert:

 🡺 🡺

 🡺

b) Zunächst muss man auf der linken Seite der Gleichung die beiden Brüche so

 erweitern, dass sie den gemeinsamen Nenner besitzen.

Da die beiden Terme äquivalent sein sollen (d.h. für alle x den gleichen Wert liefern) müssen die Koeffizienten gleich sein.

Somit erhält man folgendes LGS für A und B:

Aus folgt bzw.

Einsetzen in liefert:

c) Nullstellen: Ein Bruch nimmt den Wert Null an, falls sein Zähler Null wird.

Aus folgt ist die einzige Nullstelle von f.

Da eine einfache Nullstelle ist, wechselt das Vorzeichen von f an der Nullstelle.

Aus der Teilaufgabe a) kennt man den Bereich, indem die Funktionswerte von f negativ sind.

Zudem sind die beiden Definitionslücken und von f Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Somit hat der Graph von f die beiden senkrechten Asymptoten

 und .

Waagrechte Asymptote (Da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.)

Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt 🡺

Die Abbildung zeigt den Graphen von f einschließlich dessen Asymptoten:

