**Disjunktive und konjunktive Normalform**

Das Ziel dieses Arbeitsblattes ist es, zu zeigen, dass jeder Junktor sich mithilfe von ¬, ∨ und ∧ ausdrücken lässt.

1. Zeigen Sie, dass sich die Junktoren → und ↔ mithilfe von ¬, ∨ und ∧ ausdrücken lassen.

A → B ist logisch äquivalent zu \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ ,

A ↔ B ist logisch äquivalent zu (\_\_\_\_ → \_\_\_\_) ∧ (\_\_\_\_ → \_\_\_\_) und damit zu

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .

Doch auch zu jedem anderen Junktor, egal wie viele Stellen er hat, gibt es einen logisch äquivalenten Ausdruck, der nur die Junktoren ¬, ∨ und ∧ enthält.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Beispiel:** Gegeben ist ein dreistelliger Junktor J durch die rechts stehende Wahrheitstabelle. Wir suchen einen logisch äquivalenten Ausdruck. Dazu wählen wir die Zeilen aus, in denen J den Wahrheitswert w hat, also die 3., die 5., die 6. und die 8. Zeile.  Der gesuchte Ausdruck muss somit genau in den folgenden Fällen wahr sein:   * A ist wahr, B ist falsch und C ist wahr, * A ist falsch, B ist wahr und C ist wahr, * A ist falsch, B ist wahr und C ist falsch, * A ist falsch, B ist falsch und C ist falsch. | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **A** | **B** | **C** | **J** | | w | w | w | f | | w | w | f | f | | w | f | w | w | | w | f | f | f | | f | w | w | w | | f | w | f | w | | f | f | w | f | | f | f | f | w | |

Das bedeutet er ist genau wahr, wenn

* (A ist wahr, ¬B ist wahr und C ist wahr), oder
* (¬A ist wahr, B ist wahr und C ist wahr), oder
* (¬A ist wahr, B ist wahr und ¬C ist wahr), oder
* (¬A ist wahr, ¬B ist wahr und ¬C ist wahr).

Man erhält die Aussage

(A ∧ (¬B) ∧ C) ∨ ((¬A) ∧ B ∧ C) ∨ ((¬A) ∧ B ∧ (¬C)) ∨ ((¬A) ∧ (¬B) ∧ (¬C)).

1. Begründen Sie, dass dieser Ausdruck logisch äquivalent zu J ist.

Diese Form einer Aussage heißt disjunktive Normalform. Das obige Verfahren funktioniert bei jedem Junktor, auch wenn er nicht dreistellig, sondern zweistellig, vierstellig, fünfstellig oder n-stellig (für eine natürliche Zahl n ≥ 2) ist. Es funktioniert auch bei allen einstelligen Junktoren außer dem Falsum. Denn in dessen Wahrheitstabelle gibt es keine Zeile mit dem Wahrheitswert w.

**Definition:** Eine Aussage ist in **disjunktiver Normalform** (kurz: DNF), wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen ist, wobei diese Konjunktionen elementare Aussagen (d.h. A, B, C …) oder deren Negation verknüpfen.

1. Bilden Sie die disjunktive Normalform von A → B und von A ↔ B.  
   Vergleichen Sie mit der Form oben auf diesem Blatt.
2. Bilden Sie die disjunktive Normalform von A → (B ∧ C).

Analog dazu gibt es auch die konjunkive Normalform.

**Definition:** Eine Aussage ist in **konjunktiver Normalform** (kurz: KNF), wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen ist, wobei diese Disjunktionen elementare Aussagen (d.h. A, B, C …) oder deren Negation verknüpfen.

Um die konjunktive Normalform obiges Junktors J zu bilden, betrachtet man die Zeilen der Wahrheitstabelle, in denen ein f steht. Man erhält den Ausdruck

((¬A) ∨ (¬B) ∨ (¬C)) ∧ ((¬A) ∨ (¬B) ∨ C) ∧ ((¬A) ∨ B ∨ C) ∧ (A ∨ B ∨ (¬C)).

Dieses Verfahren ist bei jedem n-stelligen Junktor (mit einer natürlichen Zahl n ≥ 1) durchführbar, außer beim Verum. Denn in dessen Wahrheitstabelle gibt es keine Zeile mit dem Wahrheitswert f.

1. Begründen Sie, dass dieser Ausdruck logisch äquivalent zu J ist.
2. Bilden Sie die konjunktive Normalform von A → B und von A ↔ B.  
   Vergleichen Sie mit der Form oben auf diesem Blatt.
3. Bilden Sie die disjunktive Normalform von A → (B ∧ C).